This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

3433 06909388 2

(Busse 1825)

Bündige und reine Darstellung

des

wahrhaften

Infinitesimal-Calculs

wie sie

besonders auch für wissenschaftliche Praktiker

rathsam ist.

Von

D. *Friedrich Gottlieb von Busse*,

Berg-Commissionsrath und Professor der Mathematik, Physik und Bergmaschienen-Lehre an der Kön. Sächs. Bergakademie, Senator im Rathe und Assessor im Bergschöppenstuhle zu Freyberg; mehrer gel. Gesellsch. Mitgliede.

Erster Band.

Differentialrechnung

mit zwei Kupfertafeln.

Dresden, 1825,

in der Arnoldischen Buchhandlung.

Sr. Königl. Hoheit

dem

PRINZEN JOHANN,

Herzog zu Sachsen, General - Major der Cavallerie und Chef des zweiten Reiter - Regiments, Vicepräsident des Geheimen Finanz-Collegii, Ritter des Königl. Sächs. Ordens der Rautenkrone, Groſskreuz des Kön. Sächs. Civil - Verdienstordens und Ritter des Kön. Baierichen St. Hubertus - Ordens.

Durchlauchtigster Prinz!

Gnädigster Herr!

Eure Königl. Hoheit hatten in dem hochverehrlichen Geheimen Finanz-Collegio Höchstselbst die bergakademische Registrande übernommen, als ich zur öffentlichen Mittheilung meines Lehrsystemes ermuntert, und dabei zuvörderst mit dem Infinitesimal-Calcul beschäftigt, allerdings auch durch die Vorstellung erheitert wurde, in Höchstdenenselben einen Obern zu haben, der bei einer vielseitig wissenschaftlichen Ausbildung, eine besondere Vorliebe für das gründliche Studium der mathematischen Wissenschaften unterhält.

Wenn die Methoden des höhern Calculs durch sich selbst, und namentlich durch strenge und calculatorisch vollständige Begriffe des Unendlichen bündig erwiesen, keinesweges von der ungleich mühseligeren Analysis des Endlichen eine heterogene Glaubwürdigkeit zu erborgen nöthig haben: so kann man auch einen herzhaften Gebrauch von jenen Methoden machen, um die schwierigsten für die mathematische Praxis nöthigen Formeln und Reihen auf den kürzesten Wegen sich zu verschaffen; und so können dann namentlich auch die Eleven der

Königl. Sächs. Bergakademie mehre Zeit für die ihnen hauptsächlich nöthige angewandte Mathematik erübrigen, welche überdies eine vielseitigere Umsicht und Gewandtheit des Verstandes, wie sie dem Praktiker vorzüglich nöthig ist, zu üben, mehr als ein gar zu lange dauerndes Studium der calculatorischen Elementar-Mathematik geeignet ist.

Seit nunmehr vollen 24 Jahren in dem eigentlichen Sachsen mit sächsicher Humanität und Herzlichkeit aufgenommen und behandelt, würde es mir auch sehr erfreulich seyn, wenn

es mir gelungen seyn sollte, durch meinen Vortrag des höheren Calculs gerade Leibnitzens, des Sachsen, Algorithmus als den rathsamsten, den wirklich vorhandenen Naturkräften völligst angemessener dargestellt, und gegen die fernere Anmafsung der Surrogate gesichert zu haben.

Dafs ich es schicklich finden konnte, solche Ansichten, die man sonst nur in der Vorrede den Meistern der Wissenschaft vorzulegen pflegt, Einem Königlichen Prinzen zur eigenen Beurtheilung zu unterlegen, wird dem ganzen wissenschaftlichen Teutschlande nicht

auffallen, indem es schon gewohnt ist, für das Königlich Sächsische Regenten-Haus auch in Hinsicht wissenschaftlicher Kenntnisse eine ausgezeichnete Verehrung zu unterhalten.

Möchte meine Hoffnung, den Lehrvortrag der höheren Mathematik für die theoretisch-praktische Bergakademie zweckdienlich erleichtert zu haben, in einige Erfüllung gehen, und dadurch auch mein angelegentlicher Wunsch gekrönt werden, durch diese meine Arbeit

Höchstdero gnädigster Protection empfohlen zu seyn. In tiefster Devotion ersterbend als

Ewr. Königl. Hoheit

unterthänigst gehorsamster

Friedrich Gottlieb von Busse.

Vorrede.

Beinahe zwanzig Jahr hindurch hatte ich die meisten Theile der reinen und der angewandten Mathematik nur der Theorie wegen betrieben, als ich in den letzten 6 Jahren des vorigen Jahrhunderts, meiner Lehrämter in Dessau überhoben, und in die unmittelbaren Dienste des ruhmwürdigen, meinem Herzen ewig theuern, damaligen Fürsten, Leopold Friedrich Franz genommen, nunmehr auch meine Kenntnisse der höhern Mathematik auf Strom- und Maschinenbau anzuwenden suchte.

Schon a priori war ich allerdings entschieden, des Herrn Lagrange Functionen-Calcul, auch nur als ein schickliches Surrogat für die Resultate des wahrhaften Infinitesimal-Calculs nicht anzuerkennen.

Nachdem ich aber überdies durch ein genaueres Studium der höhern Mechanik es inne wurde, wie äufserst deutlich man die *mechanischen* Wirkungen der statischen Naturkräfte, von *ihrem* Nichts in dem ersten Zeitpuncte ihres Entstehens anfangend, durch die unendlich kleinen Zeitverläufe dieser Wirksamkeit sie verfolgend, und durch deren Summator, die Trägheit, zum endlichen Integrale vollendet, rein calculatorisch durch Leibnitzens Infinitesimal-Calcul sich darstellen kann, und dieser dann besonders mit Hülfe des von mir behaupteten, auch in der Integralrechnung mit zu benutzenden Vollgrofs, so wahrhaft adäquat jenen Wirklichkeiten angemessen erscheint, dafs namentlich

auch der Hauptsatz der ganzen höhern Mechanik, welchen d'Alembert, an dessen bündigem Erweise verzweifelnd, nur als zufällig wahr in dieser unserer Welt glaubte annehmen zu müssen, vielmehr als schlechterdings nothwendig mir darstellig wurde; wie hätte ich nunmehr mich irgend entschliessen können, mit Lagrange nur an den Calcul mit endlichen Gröfsen mich halten zu wollen, die unendlich kleinen Gröfsen, während ihres allmähligen Entstehens und Verschwindens gleichsam zu perhorresciren, und somit darauf Verzicht zu thun, jene mechanische Wirkungen auch während ihres Entstehens schon dem Calcul zu unterwerfen!!

Von nun an lediglich darauf bedacht, für die in der Natur wirklich vorgefundenen Infinitesimalien, auch das calculatorische System bündig und unanstöfsig zu durchsehen, konnte sich des Herrn l'Huillier, in vieler Hinsicht scharfsinnige Darstellung desselben, aus mehren Gründen mir nicht empfehlen *). *Carnot's Réflections sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, wurde nach einer flüchtigen Durchlaufung ebenfalls von mir zurückgelegt, weil ich dessen schon gewifs genug geworden war, dafs man den Differential-Calcul fehlerhaft anzulegen, und dann hinterher den Fehler zu vernichten, gar nicht nöthig habe. **)

Wesentliche Dienste leisteten mir dann ferner meine deutliche Ueberzeugung, dafs jeder Infinitesimal-Calcul als sol-

---

*) Wenn man für die Praxis den höhern Calcul ergreift, um für die Infinitesimalien der Naturkräfte in der Kürze genauer zu schliefsen, als durch endliche Gröfsen es möglich ist, wie kann man mit Hrn. l'Huillier sich entschliefsen, darauf Verzicht zu thun, dafs die Folgerungen jenes Calculs in völliger Strenge zutreffend seyn sollen! M. s. meine Betrachtung der Höll'schen Wassersäulenmaschine, Freyberg 1804. S 61. Ueberdies ist sein System für den Praktiker viel zu mühselig; und was mir in andern Systemen anstöfsig und dem unbefangenen Verstande entgegen laufend schien, ist darin theils beibehalten, theils doch nicht ausdrücklich verworfen oder widerlegt.

**) In ihr vortheilhaftestes Licht gestellt wurden Carnot's Ansichten erst einige Jahre später durch des Hrn. Hauff Uebersetzung und hinzugefügte eben so deutliche als lehrreiche Erörterungen.

cher des Nichts $= o$, als einer Gränze, bald als Anfang, bald als Ende der unendlich kleinen Gröfsen schlechterdings bedürftig ist, eben so nothwendig aber auch ein $\frac{1}{o} = \infty$ als erreichtes Ziel der $\frac{1}{\epsilon} = \infty$, in calculatorischen Gebrauch nehmen müsse.

Hiemit lagen mir die Unterscheidungsgründe zwischen der absoluten o, und den beiden $\pm o = \frac{1}{\pm \infty}$ um so leichter auch für den Differentialgebrauch vor Augen, je mehr ich schon bei meiner Erörterung der trigonometrischen Scalen gewifs geworden war, dafs man, die Behauptung $\infty = +\infty = -\infty$ glauben zu lernen, keineswegs nöthig habe.

Als nunmehr auch meine Unterscheidung zwischen denen Producten $o.\infty$, welche nicht $= o$ sind, und den sämmtlichen übrigen, welche $= o$ seyn müssen, hinzugekommen war: so sah ich endlich mich der bekannten, immerfort mir anstöfsig gewesenen Lehre entledigt, dafs der nach allgemeinen Gründen und Regeln aufgefundene Differentialquotient, nicht in allen Fällen der wahrhaft richtige und brauchbare sey!

Von mehren Lehrern, welche dieses Satzes gar nicht erwähnen, mufs man vermuthen, dafs sie mit den Darstellungen Eines Joh. Bernouilli, Eulers, Karstens, Kästners, u. s. w. nicht bekannt gewesen sind; und die Anhänger des Function-Calculs mufsten ihn glauben, weil er ja darin vermittelst lauter endlicher Gröfsen, nach Versicherung des Erfinders, eben so strenge, als irgend ein Satz in der Euklideischen Geometrie erwiesen, und überdies durch neue Motivirung gerechtfertigt ist!!

In dem kleinen Werkchen: *Formulae radii osculatoris, quoad valores earum positivos ac negativos, et ventilatae et diligentius quam fieri solet explicatae; cum appendice quadruplici; Dresdae in officina Arnoldi* 1825; habe ich meine Aus-

stellungen gegen die eben erwähnte, und einige andere mir irrig scheinende Lehren des höhern Calculs, vor den Meistern der Wissenschaft umständlicher dargelegt, als es in diesem Lehrbuche für Anfänger schicklich war; welches mir ohnedies auch dadurch etwas angeschwollen ist, dafs ich auch den Anfängern es bemerklich machen wollte, wie und warum mein Lehrvortrag von dem gewöhnlichen abweichend sey.

Einige in dieser Hinsicht vielleicht vorzüglich merkwürdige Capitel *) kann ich erst im Nachtrage zur Differentialrechnung, hinter der Integralrechnung folgen lassen, weil ich Wort halten, und den ersten Band zur Messe fertig liefern mufste.

Dessen ungeachtet hoffe ich, dafs der zweite Band etwa noch stärker als dieser erste gewifs nicht ausfallen, und spätestens zur Ostermesse 1826 erscheinen soll.

Gerade die deutliche Begründung der Differentialrechnung erfordert eine umständliche und sorgfältige Erörterung, um für die Integralrechnung in der Kürze deutlich zu werden. Auch wird man finden, dafs selbst geübte Mathematiker, in der Anwendung des Differentialcalculs, gerade also in der **Anlegung** des höhern Calculs, am meisten fehlen, und dadurch ganze Systeme von Theorien erarbeitet sind, welche wie Seifenblasen zerspringen, wenn man sie in wirklichen Gebrauch nehmen will.

Es versteht sich übrigens von selbst, dafs zu solchen luftigen Arbeiten die partiellen Differentialquotienten an Anstelligkeit sehr gewinnen, wenn man sie als Fonctions dérivées schreibt, weil sie dann weniger deutlich in die Augen fallen, und weit mehr Entschuldigung durch **Schreib-** und Druckfehler für sich haben.

---

*) Aus dem XXIVten Capitel, Vergleichung der partiellen Differentiale mehrfach variabler Functionen wird es auch erhellen, dafs der Hauptsatz in des Herrn Lagrange Functionen - Entwickelung, in Eulers Calculo differentiali schon vorhanden ist, durch die dortige äusserst unbequeme Bezeichnung der partiellen Differentialquotienten aber allerdings sehr versteckt bleiben mufste.

In dem IIten Bande werde ich auch eine Anleitung mittheilen, in welcher Ordnung Anfänger dieses Lehrbuch zu befolgen, welche Paragraphen sie bis zur zweiten oder dritten Durcharbeitung zu verschieben haben. So ist es z. B. für Anfänger nützlich und angenehm, die Differentialquotienten auf die Lehre vom Gröfsten und Kleinsten früher anzuwenden, als sie systematisch schicklich hier folgen konnte.

Obgleich, auf solche Weise gebraucht, dieses Lehrbuch zum Selbstunterrichte allerdings dienen kann: so wird doch jedem anzurathen seyn, den grofsen Vortheil eines mündlichen Unterrichtes sich zu verschaffen; vorausgesetzt, dafs er einen Lehrer haben könne, der nicht selbst noch Anfänger in der Wissenschaft, sondern der Sprache der höhern Mathematik und ihrer Methoden mächtig ist. Solche Lehrer wissen es dann selbst schon, dafs die Hauptabsicht ihres mündlichen Unterrichtes nicht seyn mufs, den Mechanismus des Calculs während der Lehrstunden einzuüben, und das Lehrbuch allenthalben zu verfolgen, sondern allgemeine Ansichten darüber mitzutheilen, und durch ihren freien und richtigen Vortrag, die Sprache der höhern Methoden ihren Zuhörern geläufig zu machen.

Dafs es auch in Teutschland nicht nur für Praktikanten, sondern auch für Directorial-Beamte im Bergbau, und in anderen technischen Behörden, ein Bedürfnifs werden müsse, mit der Sprache der höhern Mathematik und ihren Methoden etwas bekannt zu seyn, habe ich vor 24 Jahren, bei dem Antritte meines hiesigen Lehramtes richtig vorausgesagt. Einige Jahre nachher wurde von dem trefflichen theoretisch-praktischen Mathematiker, dem Herrn Gubernialrath und Ritter von Gerstner in Prag, das dortige polytechnische Institut gestiftet; etwas später wurde namentlich in Berlin und München durch Lehre und Beispiel dortiger dirigirender Beamten der höhere Calcul für die Praxis empfohlen; bei der Begründung des technischen Institutes in Wien, wurde er von Anfang an, wie in Prag, für nothwendig anerkannt; und vor nunmehr 3 Jahren hatte auch der Herr Bergrath

Schitkow in Schemnitz ihn zu lehren angefangen. Von dem dortigen Lehrer der Forstwissenschaft, Herrn Bergrath Wilkens *) war er immer schon seinen Zuhörern als nützlich empfohlen worden.

Durch Versehen ist es im IVten Capitel unbemerkt geblieben, dafs der Herr Prof. E. G. Fischer in Berlin der erste ist, der es öffentlich mitgetheilt hat, dafs man die Differentialquotienten als Endgränzen der Function betrachten könne. Als eine dimensorische Darstellung habe ich sie immer schon in meinem mündlichen Vortrage benutzt. Wie sehr ich die Verdienste dieses gründlichen Mathematikers anzuerkennen bereit sey, wird auch aus meiner Recension seiner Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höheren Analysis. 1808. Leipziger Liter. Zeitung, 1809, No. 2 und 3 erhellen. Gegen einige neuere Behauptungen glaubte ich in der ersten Vorerinnerung mich erklären zu müssen.

Freiberg, den 3. April 1825.

---

*) In Schemnitz hatte ich unerwartet das Vergnügen ihn vorzufinden, der von nunmehr fast einem halben Jahrhundert mit mir gleichzeitig als angehender Mathematiker aufgetreten war.

Vorerinnerungen.

Vorerinnerung I.

Warnung gegen einige algebraische Behandlungen.

1.

Der Ausdruck $\frac{a\sqrt{ax} - xx}{a - \sqrt{ax}}$ ergibt sich $= \frac{0}{0}$ für $x = a$; und nun wird in einigen der vorzüglichern Lehrbücher durch elementarische Behandlung dieses Ausdruckes gefunden, daſs dessen $\frac{0}{0}$ nicht nur den bestimmten Werth $= 3a$, sondern auch noch einen zweiten $= -a$ habe. Ich behaupte, dieser zweite Werth wird durch eine fehlerhafte Behandlung hinein gebracht, welche in der Kürze folgende ist.

Der mit x veränderliche Werth dieses Ausdruckes heiſse X, so hat man $X = \frac{a\sqrt{ax} - xx}{a - \sqrt{ax}}$; folglich auch $Xa + xx = (a + X).\sqrt{ax}$; daher auch, schlieſst man, $(xx + aX)^2 = (a + X)^2 . ax$, also auch $x^4 + 2aXx^2 - a^2x - 2a^2Xx - aX^2x + a^2X^2 = 0$

In dieses Aggregat durch $x - a$ dividirt, gibt $x^3 + ax^2 + aax + 2aaX - aXX = 0$.

Daher $XX - 2xX = ax + xx + \frac{xxx}{a}$

folglich $X = x \mp \sqrt{\left(2xx + ax + \frac{xxx}{a}\right)}$.

Für $x = a$ also $X = a \mp \sqrt{4a} = a \mp 2a$.

Unnöthiger Weise hat man hier die Gleichung mit $\sqrt{ax}$ rational gemacht. Unnöthiger Weise! da ja für x die Gleichung hier nicht aufgelöst werden soll. Durch das Quadriren der Gleichung wird ja der gegebne Ausdruck dergestalt zweiförmig gemacht, dafs dem wirklich gegebnen X zuwider, der zweite Werth $X = a - 2a = -a$ ihm aufgebürdet wird; wogegen wir durch unsere in der Differentialrechnung Cap. III. §. 2. mit beigebrachte, richtige elementarische Behandlung lediglich $X = 3a$ finden werden.

Ohne diese Erörterung würde gegen die Differential-Methode Cap. XVII. der Verdacht entstehen müssen, dafs sie nicht die sämmtlichen Werthe dieses $X = \frac{0}{0}$ anzugeben vermöge! mit der elementarischen algebraischen Methode nicht völlig übereinstimmend sey.

2.

Vertheidigung des Productes $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{(-a).(-b)}$, *aber nicht als* $= \sqrt{ab}$ *sondern* $= -\sqrt{ab}$.

Der Herr Prof. E. G. Fischer hat in seinem Lehrbuche der Elementarisch. Mathematik Theil 3, Berlin 1824. Seite 59, welches viele andere wohl begründete Winke zur Verbesserung der Methode für geübte Leser gibt; den neuen Lehrsatz aufgestellt.

Zwischen zwei ungleichen imaginären Formeln findet gar keine Multiplication

statt, wohl aber zwischen einem imaginären, und einem absoluten Factor.

Im Zusatze S. 60 wird daraus gefolgert, dafs der früherhin für absolute Gröfsen erwiesene Satz $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, nicht mehr unbedingt gültig bleibe, wenn man a und b dem algebraischen $\mp$ zu unterwerfen denkt. „Er bleibt nur gültig 1) wenn a und b po„sitiv sind, 2) wenn von diesen Gröfsen die eine „positiv, und die andre negativ ist; aber er verliert „3) allen Sinn, wenn man beide negativ setzt, so „dafs die Formel $\sqrt{-a}.\sqrt{-b}$ etwas sinnloses an„deutet, womit gar keine weitere Rechnung gemacht „werden kann."

Sinnlos soll, nach dem dortigen Beweise des Lehrsatzes, die geforderte Multiplication deshalb seyn, weil man zufolge der in der (gemeinen) Arithmetik gegebnen Difinition etwas müfste finden sollen, was aus $\sqrt{-a}$ eben so durch Theilung und Vervielfältigung entstände, als $\sqrt{-b}$ aus der Einheit. Nun ist aber klar, dafs durch alle erdenkliche Theilung der Einheit und Vervielfältigung solcher Theile nimmermehr die imaginäre Formel $\sqrt{-b}$ (imaginäre, unmögliche Gröfse $\sqrt{-b}$) *) entstehen könne; also etc.

Abermals, meines Erachtens, ein Beispiel, dafs man die Lehren einer neu erweiterten Wissenschaft nicht den Definitionen einer älteren eingeschränkten Wissenschaft mufs unterwerfen wollen. So wie man sich für die Verhältnisse zwischen positiven und negativen Gröfsen, die Macht des alten Exponenten erweitern, und ihm zugestehen mufs, dafs er, um die

*) Der Herr Verf. will blos von imaginären Formeln gesprochen wissen. Aber die Formel $\sqrt{-b}$ ist ja wirklich vorhanden, also nicht unmöglich: wohl aber die dadurch verlangte Gröfse ist algebraisch unmöglich.

Gröfse des zweiten Gliedes darzustellen, auch der Gegengröfse des ersten Gliedes sich bedienen darf, oder mit andern Worten, der Exponent einer algebraischen Verhältnifs, nicht wie in der gemeinen Arithmetik nur eine absolute Zahl, sondern auch bald eine positive, bald eine negative Zahl *) seyn darf; eben so mufs man, nach zugestandenen imaginären oder unmöglichen Gröfsen **), auch dem Verhältnifs-Exponenten zugestehen, dafs er auch eine imaginäre Gröfse seyn könne; und so ist dann $1 : \sqrt{-a} = \sqrt{-b} : \sqrt{-a}.\sqrt{-b}$ eine richtige Proportion; weil beide Verhältnisse einerlei Exponenten $\frac{\sqrt{-a}}{1}$ haben; und so mufs dann auch $\sqrt{-a}.\sqrt{-b}$ für ein regelmäfsiges Product anerkannt werden.

Auch kann es namentlich auf zweierlei Weise bündig erwiesen werden, dafs $\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = \sqrt{-a.-b}$ seyn mufs, auch dieses $= -\sqrt{ab}$ seyn, nämlich die verneinte Quadratwurzel des ab seyn, und sowohl $+\sqrt{-a}.+\sqrt{-b}$, als auch $-\sqrt{-a}.-\sqrt{-b}$ allemal $= -\sqrt{ab}$ seyn mufs. ***)

---

*) In der zweiten Auflage meiner Algebraischen Auflösungen denke ich es bündig dargethan zu haben, dafs man der Algebra bejahte und verneinte Zahlen zugestehen mufs, obgleich das alt arithmetische Gewissen sich ängstlich dagegen zu verwahren sucht.

**) Zwischen beiden zu unterscheiden ist ohne Nutzen; auch von dem Herrn Verf. selbst meines Wissens nicht geschehen.

***) Obgleich $\sqrt{-a}$ eben deshalb unmöglich heifst, weil es weder $+\sqrt{a}$ noch $-\sqrt{a}$ seyn kann, so mufs doch $+1.\sqrt{-a}$ und $-1.\sqrt{-a}$ im algebraischen Calcul mit der Gewifsheit anerkannt werden, dafs $+1.\sqrt{-1}) - 1.\sqrt{-1} = 0$ seyn, und $(+1.\sqrt{-a}).(-1.\sqrt{-a}) = -1.(\sqrt{-a})^2$ seyn mufs.

Erster Beweis.

In der gemeinen Arithmetik und in der gemeinen Geometrie, wird als Grundsatz gebraucht: Wenn zwei Quadrate einander gleich sind, so mufs auch die Wurzel des einen, der Wurzel des andern gleich seyn; und umgekehrt.

Für die algebraische Arithmetik und algebraische Geometrie gibt es allerdings dabei zu bedenken, dafs jedes der beiden algebraisch möglichen Quadrate zwei Wurzeln, eine bejahte und eine verneinte haben könne. Da aber aus dem allgemeinen Begriffe einer Quadratwurzel unmittelbar folgt,

dafs $(\surd -a.\surd -b)^2 = \surd -a.\surd -b.\surd -a.\surd -b = -a.-b$ seyn mufs: so ergibt sich auch eben so einleuchtend,

dafs $+\surd(\surd -a.\surd -b)^2 = +\surd(-a.-b)$

und $-\surd(\surd -a.\surd -b)^2 = -\surd(-a.-b)$ seyn mufs.

Da nun ferner ein gegebnes $\surd -a.\surd -b$, wenn von seinem $\mp$ die Rede seyn soll, allemal als ein gegebnes $+(\surd -a.\surd -b)$ zu behandeln ist, dieses aber sowohl $= +\surd -a.+\surd -b$ als $= -\surd -a.-\surd -b$ seyn kann: so ist hiermit dargethan,

dafs $\mp\surd -a.\mp\surd -b = +\surd\overline{-a.-b}$ seyn mufs. die rechte gefundene Seite schlechterdings allemal $+\surd$ haben mufs, es mag in der gegebnen linken Seite jedes seiner beiden $\surd$ als $+\surd$ oder als $-\surd$ gegeben seyn sollen.

Wenn wir nun aber aus dem bekannten Satze, dafs $-a.-b = +ab$ ist, auch schliefsen wollten, dafs das eben erwiesene $\mp\surd -a.\mp\surd -b = +\surd\overline{-a.-b}$ auch $= +\surd ab$ seyn müsse: so würden wir einen Fehlschlufs begehen, durch dessen Beachtung und Vermeidung ich in früheren Schriften schon so manchen Widerspruch im algebraischen Erfolge erklärt und vertilgt habe.

Nämlich, so gewifs es ist, dafs man $\sqrt{aa} = \mp\sqrt{aa} = \mp a$ ansetzen mufs, so lange man noch nicht weifs, ob aa als $+a.+a$, oder als $-a.-a$ entstanden sey; eben so ausgemacht ist es, dafs diese Zweideutigkeit wegfällt, wo man es weifs, dafs nicht $+a.+a$ sondern $-a.-a$ gegeben ist. Denn $\sqrt{(+a.+a)}$ ist nur $= +a$ und $\sqrt{(-a.-a)}$ ist nur $= -a$!

Da man nun in dem gegebnen $\sqrt{-a}.\sqrt{-b}$ allemal $-b = -\frac{ab}{a}$ behaupten kann, folglich das gegebne $\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = \sqrt{-a}.\sqrt{-\frac{ab}{a}} = \sqrt{-a}.\sqrt{-a}.\sqrt{\frac{b}{a}} = -a.\sqrt{\frac{b}{a}} = -(\sqrt{a}.\sqrt{a}).\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ seyn mufs: so ist hiemit dargethan, dafs das gegebne $\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$ seyn mufs.

Ein zweiter Beweis

ergibt sich durch die bekannte Schlufsfolge, dafs $\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = \sqrt{a}\sqrt{-1}.\sqrt{b}.\sqrt{-1} = \sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{a}.\sqrt{b} = -1.\sqrt{ab}$ seyn mufs; welche auch nachher in jenem Lehrbuche selbst als richtig aufgeführt, und zur Berechnung des $\sqrt{-a}.\sqrt{-b}$ gebraucht wird!

Sollte vielleicht der ehrwürdige Verfasser durch den Schlufs $\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = \sqrt{(-a.-b)} = \sqrt{ab}$, auf den Gedanken gerathen seyn, dafs die Forderung $\sqrt{-a}$ durch $\sqrt{-b}$ zu multipliciren etwas sinnloses sey: so wäre es auch durch diesen Vorfall abermals mir erlaubt, zu erinnern, dafs ich in meinen Erörterungen über algebraische Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie seit 25 Jahren so manches schon systematisch bündig erklärt und bestimmt habe, wofür man auch späterhin immer noch weniger genügende einzele Erklärungen versucht; z. B. für das trigonometrische $\pm$

auch in dem vorliegenden Lehrbuche, *) desgleichen für den Hauptsatz, dafs, in der algebraischen Mafsleiter die Einheit nothwendig bejaht mufs angenommen werden.

3.

Aus $A \lessgtr B$ folgt keinesweges dafs auch $-nA \lessgtr -nB$ sey, wie es bei manchen berühmten Mathematikern, z. B. Lagrange geradezu, bei andern versteckt vorkommt, sondern die allgemein richtige Folge ist, $-nA \gtrless -nB$. Die Begründung dieser Behauptung findet man in meinem schon erwähnten Ersten Unterrichte in der algebraischen Auflösung, 1808. §. 136. In der ersten Auflage 1781 habe ich selbst manche unrichtige Lehre drucken lassen; wie ich schon lange es eingestanden habe; unter andern auch das in dem vorberührten Lehrbuche so genannte Skandal, dafs die Einheit nach Belieben, entweder bejaht oder verneint könne angenommen werden. Dafs aber die negativen Gröfsen kleiner als Nichts zu nennen sind, welches der Hr. Verf. ebenfalls anstöfsig findet; denke ich in der ersten Ausgabe, mit andern Mathematikern als schicklich, in der zweiten Auflage als systematisch nothwendig erwiesen zu haben.

---

*) Seite 185 heifst es: Vom Null sowohl als vom Unendlichen kann man mit gleichem Recht sagen, es sey weder positiv noch negativ, oder auch es sey beides zugleich. Ich habe dagegen behauptet, dafs namentlich jede Abgleichung $+\infty = -\infty$ nicht etwa den gemeinen Menschenverstand übersteigend, sondern ihm entgegenlaufend sey, und selbst auch der Übergang der trigonometrischen Tangenten durch $+\infty$ und $-\infty$ ganz anders, und ganz augenfällig durch $+\infty = -(-\infty)$ zu erklären ist.

Vorerinnerung II.

Gegebne und gesuchte Gröfsen der Algebra, beständige und veränderliche Gröfsen der Analysis.

§. 1. In der Algebra wird man angewiesen, die so genannten bekannten Gröfsen, das heifst diejenigen, welche man als gegeben will betrachtet wissen, durch die ersten Buchstaben des Alphabetes, und dagegen die unbekannten, gesuchten Gröfsen durch dessen letztere Buchstaben zu bezeichnen.

Die Differential- und Integralrechnung kann zwar auch der Algebra zu Hülfe kommen, doch nur vermittelst der unbestimmten Analytik, für welche diese höheren Hülfsmittel nur geeignet sind. In der unbestimmten Analytik aber hat man hauptsächlich zwischen Constanten und Variabeln (beständigen und veränderlichen Gröfsen) zu unterscheiden; daher es namentlich auch für die Differential- und Integralrechnung heifst, dafs man die beständigen Gröfsen durch die ersten; die veränderlichen Gröfsen durch die letzteren Buchstaben des Alphabetes zu bezeichnen pflegt.

§. 2. Sollen in der Gleichung $xx + yy = aa$ durch x und y die sämmtlichen Coordinaten eines Kreises bedeutet werden: so sind sie allemal und nothwendig veränderliche Gröfsen, indefs dagegen der Halbmesser a immerfort einerlei bleiben, von beständiger, unveränderlichen Gröfse bleiben mufs, so lange man es mit lauter Coordinaten zu thun haben will, die sich in einerlei Kreise befinden.

§. 3. Eben so mufs in der Parabelgleichung $yy = bx$ der Parameter b, und in der Ellypsengleichung $yy = cc - \frac{cc}{aa} xx$, jede der beiden Halb-Axen a und c

als eine beständige, immerfort sich gleich bleibende Gröfse angenommen werden, so lange man von den veränderlichen Coordinaten x und y verlangt, dafs sie immerfort als Coordinaten in einer und derselben Parabel oder Ellypse neben einander vorkommen sollen.

§. 4. Wenn man dagegen für die Parabel $yy = ax$ schreibt, so würde damit angedeutet seyn, dafs man auch den Parameter will veränderlich gedacht wissen.

§. 5. Die Subtangente in der Logarithmik ist eine beständige Gröfse, so lange man in einerlei logarithmischem Systeme bleibt, also in jedem derselben lediglich die logarithmisirten Gröfsen und ihre Logarithmen mit und neben einander veränderlich zu denken hat. Dagegen würde die Subtangente selbst auch veränderlich gesetzt werden müssen, wenn man das Logarithmensystem veränderlich gedacht haben wollte.

§. 6. Allerdings werden wir sehr lange dabei bleiben, nicht nur die Subtangente in der Logarithmik, sondern auch die beiden Axen der Ellypse, den Parameter der Parabel und den Halbmesser des Kreises als beständige Gröfsen zu behandeln, und ihre Coordinaten x und y müssen dann nothwendig als veränderliche Gröfsen behandelt werden, so lange sie die sämmtlichen Coordinaten bedeuten sollen. Es würde aber z. B. in der Kreisgleichung $yy = rr - xx$, die Abscissengröfse x auf ein unveränderliches, beständiges $= c$ eingeschränkt, und dagegen der Kreishalbmesser veränderlich gesetzt werden müssen, wenn man zwischen den Ordinaten und den Halbmessern solche Gesetze ihrer gegenseitigen Abhängigkeit aufsuchen wollte, welche allen Kreisen gemein sind, sobald ihre Abscisse $x = c$ ausbedungen ist.

§. 7. Durch diese Beispiele wird es Anfängern vorläufig erhellen, wie es allerdings von der Bedeu-

tung einer Gröfse abhängt, ob sie als beständig oder veränderlich zu betrachten sey, diese Bedeutung selbst aber dem Verlangen der Aufgabe, oder sonst dem Ziele der Untersuchung gemäfs müsse gewählt und beurtheilt werden.

Vorerinnerung III.

Unabhängig und abhängig veränderliche Gröfsen. Urbelegte, und folglich belegte veränderliche Gröfsen.

§. 1. Ebenfalls eine Kreisgleichung ist $yy=2ax-xx$, wo die Abscissen x ihren Anfang im Anfangspuncte eines Durchmessers $=2a$ haben, der nun eine beständige Gröfse seyn kann, indefs den Abscissen x und Ordinaten y alle die veränderlichen Gröfsen zukommen, welche sie in diesem Kreise haben können, und welche für die x, alle mögliche Gröfsen vom $=0$ bis zum $=+2a$, für die y, alle möglichen Gröfsen vom $=0$ bis zum $=+a$ und zum $=-a$ ausmachen.

§. 2. Wenn man aber auch diese x und y nicht gerade als Abscissen und Ordinaten, sondern überhaupt nur als Gröfsen betrachtet, welche der Gleichung $yy=2ax-xx$ Genüge thun sollen: so sind sie eben deshalb auch dergestalt unbestimmte Gröfsen, dafs durch diese einzige Gleichung **lediglich** eine **Abhängigkeit** zwischen ihren verschiedenen Werthen bestimmt werden kann.

Dergleichen Abhängigkeit durch $y=\mp\sqrt{2ax-xx}$ bestimmt, setzt voraus, dafs man der x zuvörderst bald diese, bald jene beliebige Gröfse beilegen, und

dafür jedesmal auf das ihr zugehörige y schliefsen wolle; und dann pflegt man x die unabhängig, die ursprünglich veränderliche Gröfse zu nennen, würde im Teutschen kürzer, jene x die Vorveränderliche und y die Nachveränderliche nennen können.

Umgekehrt würde durch $x = a \mp \sqrt{\frac{aa}{4} - yy}$ gefordert werden, dafs man zuvörderst der y einen von ihren Werthen beilegen, und daraus auf das diesem y zugehörige nachfolgend veränderliche x schliessen solle.

§. 3. Solche Unterscheidung zwischen ursprünglich und nachfolgend veränderlichen Gröfsen, wie sie in der gemeinen Analysis schon vorkommen kann, habe ich hier absichtlich voranschicken wollen, um nun hinzuzufügen, dafs die meistens so genannte unabhängige und abhängige Veränderlichkeit (besser, die ursprüngliche und nachfolgende Belegtheit) in der Differenzen- und Differentialrechnung davon verschieden ist.

§. 4. Denn von den beiden Veränderlichen x und y der Gleichung $yy = 2ax - xx$, wird x die primitive, unabhängig Veränderliche, und y dagegen die abhängig Veränderliche genannt, wenn x mit einem ihr gleichartigen Zusatze $\triangle x$ belegt wird, um auf den dadurch für y verursachten Zusatz $\triangle y$ zu schliessen; daher wir dann auch treffender, x die urbelegte und y die folglich belegte nennen werden. Durch solche Belegung $\triangle x$ soll aber die x keineswegs auf irgend einen oder irgend einige ihrer veränderlichen Werthe eingeschränkt seyn, sondern dieser Zusatz soll während ihrer ganzen, sämmtlichen Veränderlichkeit ihr beigelegt gedacht werden; weil die ganze Absicht dieser Belegung darin besteht, dafs man einen für die sämmtliche Veränderlichkeit des x gültigen Ausdruck das $\triangle y$

auffinde; woraus sogleich einleuchtet, dafs bei nicht veränderlichen, constanten Gröfsen, diese Absicht einer solchen Belegung gar nicht Statt finden kann.

Vorerinnerung IV.

Unterscheidung zwischen gliederconvergenten und summatorisch convergenten Reihen.

§. 1. Die Begriffe der Convergenz sind ursprünglich geometrisch. Zwei gerade Linien, die einander schneiden, laufen bis zu ihrem Schneidungspuncte convergirend (sich nähernd) zusammen, wo ihre Convergenz ein Ende hat, weil die Entfernung zwischen den beiden Linien dort $=0$ geworden ist. Ein hyperbolischer Schenkel ist gegen seine geradlinige Asymptote ohn Ende convergent, weil er ihr immerfort näher und näher kommt, ohne irgendwo sie schneidend zu erreichen.*)

§. 2. Wenn wir diese Begriffe auf calculatorische Reihen übertragen wollen, so sind wir wohl berechtigt, jener geometrischen Anschaulichkeit gemäfs von einer Reihe zu sagen, dafs sie convergent sey, sobald ihre auf einander folgenden Theile immerfort an absoluter Gröfse kleiner werdend sind; es mögen nun solche Theile in einzelen Gliedern, oder bei ungleich bezeichnenden, in Aggregaten aus zweien oder mehren auf einander folgenden Gliedern bestehen.

---

*) In wie fern sie beide in ihrer geometrischen Unendlichkeit einander berührend erreichen möchten, brauchen wir hier noch nicht zu erörtern.

§. 3. Aber nicht jede Reihe, die in diesem Verstande convergent ist, und **gliederconvergent** heifsen mag, ist auch **summatorisch** convergent. Sobald wir z. B. überzeugt sind, dafs die Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \text{etc.} = \infty$ seyn, nämlich die Summe aus dieser Reihe mit unendlich vielen Gliedern etwas unendlich grofses geben müsse: so werden wir nicht behaupten wollen, dafs ein endlicher Anfangstheil der Reihe für die Summe der ganzen Reihe mit desto geringerem Fehler gebraucht werden könne, je gröfser die Anzahl der Glieder in diesem Anfangstheile angenommen ist; denn solcher Anfangstheil kann ja immer nur eine endliche Gröfse geben, welche von der unendlich grofsen Summe abgezogen, immer noch einen unendlich grofsen Rest zurück lassen mufs.

§. 4. „Daraus (heifst es bei **Kästner** in seiner „**Analysis des Unendlichen** 1799. S. 309.) dafs „in einer Reihe die folgenden Glieder immer kleiner „werden, folgt nicht, dafs die Reihe convergirt, son„dern man mufs das nach der Formel, woraus die „Reihe ist gefunden worden, beurtheilen."

„Z. B. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$
„Diese Reihe convergirt allemal, wenn x ein eigent„licher Bruch ist, denn alle ihre Glieder zusammen „machen nicht mehr als die endliche Gröfse $\frac{1}{1-x}$."

§. 5. Einleuchtend will **Kästner** unter **convergirend** verstanden wissen, was in §. 3. wir **summatorisch** convergirend genannt haben; und so ist sein angegebner Grund zu viel beweisend. Denn wenn auch x kein eigentlicher Bruch, sondern gröfser als 1 wäre, so würde dennoch $\frac{1}{1-x}$ eine

endliche Gröfse seyn; und gleichwohl würde die Summe aus den ersten r Gliedern der Reihe, statt der ganzen Reihe gebraucht, einen immerfort gröfsern Fehler verursachen müssen, weil ja der Reihe Rückstand $= \frac{x^{r+1}}{1-x}$ ist!

Allerdings wird man hier aus der Form des allgemeinen rten Gliedes, und dem dadurch sich ergebenden Rückstande zu schliefsen wissen, für welche x, und in welcher Maafse die Reihe summatorisch convergent sey. Aber man hat es ja sehr oft mit Reihen zu thun, an deren summatorischer Convergenz uns viel gelegen ist, und bei denen wir die Summe des Rückstandes nicht so leichte, wie in den vorigen Beispielen anzugeben wissen.

§. 6. Z. B. die Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \cdots$$

deren (summatorische) Convergenz Kästner a.a.O. auf folgende Weise erwiesen meynt.

„Dafs die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots = \infty$ „ist, kann aus verschiedenen „Gründen erwiesen werden. Dies vorausgesetzt, „hat man

„also $\infty + \frac{\pi}{4} = 2.\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \cdots\right)$

„und $\infty - \frac{\pi}{4} = 2.\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \cdots\right)$

„Beide diese Reihen sind also unendlich,
„oder es ist

$$\frac{1}{2}\infty + \frac{1}{8}\pi = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \cdots$$

„Unendlich $= P$

$$\frac{1}{2}\infty - \frac{1}{8}\pi = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} \cdots$$

„Unendlich $= Q$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \cdots = P - Q$$

„Nun ist $P - Q = \frac{1}{4}\pi$; also ist $\frac{1}{4}\pi$ der endli-
„che Unterschied der beiden unendlichen Gröfsen."

Gegen diese Schlüsse mufs ich zwei Ausstellungen machen.

1) Sogleich bei der Folgerung, beide diese Reihen sind also unendlich, mufs ja schon vorausgesetzt werden, was hier erwiesen werden soll, dafs die für $\frac{\pi}{4}$ hier angegebne Reihe einen endlichen Werth hat! Denn wenn er selbst unendlich wäre, so könnte $\infty - \frac{\pi}{4}$ auch endlich seyn.

2) Auch wenn die Unendlichkeit beider Reihen-Summen, nicht nur der P, sondern auch der Q, bündig erwiesen wäre: so würde daraus noch nicht folgen, dafs $P - Q$ nothwendig eine endliche Gröfse ausmachen müsse; indem ja auch die Differenz zweier Unendlichgrofsen gar wohl wiederum unendlich grofs seyn kann.

Auf folgende Weise wird man, was Kästner beabsichtigt, und zugleich andere nützliche Lehren sicherer folgern.

§. 7. Sey

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdots + \frac{1}{1+2r} \cdots + \frac{1}{1+2(r+n)} \cdots$$

$$\text{auch } G = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \cdots\cdots + \frac{1}{1+4r} \cdots + \frac{1}{1+4(r+n)} \cdots$$

$$\text{und } K = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} \cdots\cdots + \frac{1}{3+4r} \cdots + \frac{1}{3+4(r+n)} \cdots$$

so ist G der gröfsere, und K der übrige kleinere Theil der unendlichen Reihe S.

In K ist $\frac{1}{3+4r}$ das rte, und $\frac{1}{3+4(r+n)}$ das $(r+n)$te Glied in der dem vorangehenden Gliede $\frac{1}{3}$ nachfolgenden Reihe; und die Summe aus den n auf $\frac{1}{3+4r}$ folgenden Gliedern mufs offenbar gröfser als $\frac{n.\,1}{3+4(r+n)}$ seyn. Da nun aber schon $\frac{n}{3+4r+4n} > \frac{1}{3+4r}$ seyn mufs wenn $3n + 4rn > 3+4r+4n$, also $4rn - n > 4r+3$ also $n > \frac{4r+3}{4r-1}$ genommen wird: so gibt es hinter jedem rten Gliede solche n Glieder, deren Summe gröfser ist, als das rte Glied.

Da nun ferner die Summe der ersten r Glieder immerfort gröfser und gröfser werdend ist, jede gröfser die Gliederzahl r genommen wird, gleichwohl dieser Summe an dem Ertrage der ganzen unendlichen Reihe immer noch mehr fehlt, als der letzte rte Theil der schon gefundenen Summe ausmacht: so mufs die Summe der ganzen Reihe unendlich grofs seyn, und kann daher diese Reihe K summatorisch convergent nicht seyn; (obgleich sie gliederconvergent allerdings ist.)

Da in der Reihe G jedes rte Glied $= \frac{2}{3r+4}$, also gröfser als der Reihe K rtes Glied $= \frac{1}{3+4r}$ ist: so mufs die Reihe G noch gröfser als die Reihe K, also da schon K unendlich grofs ist, um so mehr auch G unendlich grofs seyn, und demnach die Reihe $S = G + K$ aus zwei unendlich grofsen Theilen bestehen.

Da nun die Reihe $\frac{\pi}{4} = G - K$ ist, K aber $> G - 1$ seyn mufs, weil in der Reihe K jedes rte Glied $= \frac{1}{3+4r} >$ als in der Reihe G das $(r+1)$te Glied $= \frac{1}{1+4(r+1)} = \frac{1}{5+4r}$ seyn mufs: so mufs $G - K < G - (G-1)$, das ist $G - K < 1$ seyn.

Hiemit sind wir nun gewifs, dafs die Reihe $\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ etc. je weiter sie fortgesetzt wird, um desto mehr ihre Summe einer endlichen Gröfse sich nähernd geben mufs.

§. 8. Die endliche Gröfse ist bei dieser Reihe sogar kleiner als 1. Möchte sie aber auch bei andern Reihen noch so grofs seyn! Sobald es erwiesen ist, dafs die Summe der Reihe, je weiter sie fortgesetzt wird, irgend einem endlichen Werthe immerfort näher kommend seyn mufs, so ist die summatorische Convergenz der Reihe erwiesen.

Für ungemein viele und häufig vorkommende gliederconvergente Reihen wird man, dafs sie nicht summatorisch convergent sind, durch den folgenden ersten Lehrsatz, für andere dagegen, dafs sie summatorisch convergent sind, durch den zweiten Lehrsatz und dessen Zusatz sich versichern können.

Lehrsatz 1.

§. 9. Wenn einer glieder-convergenten Reihe allgemeines rtes Glied der Form $\frac{1}{a+br}$ unterworfen ist: so ist die Reihe summatorisch nicht convergent.

Beweis.

§. 10. Hinter dem rten Gliede folgen n Glieder, von denen jedes gröfser als ihr letztes, das $(n+r)$te ist, daher ihre Summe gröfser als $\frac{n}{a+b(r+n)}$ seyn mufs; und nun mufs ja

schon $\frac{n}{a+b(r+n)} > \frac{1}{a+br}$ seyn, wenn

man $an+brn > a+br+bn$

also $(a+br-b)n > a+br$ hat,

also $n > \frac{a+br}{a+br-b}$, das ist, $n > 1+\frac{b}{a+(r-1)b}$ genommen fordert, welches allemal durch eine endliche bejahte Zahl n geleistet werden kann, die Gröfsen a und b mögen bejaht oder verneint bezeichnet gegeben seyn.

§. 11. Z. B. in der Reihe $S = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\ldots+\frac{1}{1+2r}\ldots$ (§. 7.) ist auch $a=1$ und $b=2$, also $n > 1+\frac{1}{\frac{1}{2}+r-1}$ gefordert, uns gewifs, dafs schon die Summe aus diesen n Gliedern einen gröfsern noch fehlenden Theil der Reihe S ausmachen mufs, als man durch das rte Glied gewoennn hat.

Gesetzt man hätte die Reihe bis zum Gliede $\frac{1}{5}$ summirt, und wollte nun zu dieser Summe

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ noch das dritte Glied $\frac{1}{7}=\frac{1}{1+2.3}$ in der Hoffnung hinzufügen, dafs man dadurch der ganzen Reihensumme näher gekommen seyn werde: so würde diese Hoffnung falsch seyn. Denn da hier $r=3$ ist, so hat man nur $n>1+\frac{1}{\frac{1}{2}+2}$ also $n>1+\frac{2}{3}$, also $n=2$ zu fordern, um gewifs zu seyn, dafs die Summe aus diesen zwei Gliedern $=\frac{1}{9}+\frac{1}{11}=$ einen grössern Theil der noch fehlenden Reihe ausmacht, als man durch Hinzufügung des Gliedes $\frac{1}{7}$ gewonnen hat.

Lehrsatz 2.

§. 12. Wenn in $S=x^p+x^q+x^r+x^s\ldots+x^{p+(q-p)\infty}$ entweder I) $x<1$ ist, und $p, q, r\ldots$ eine steigende arithmetische Reihe,

oder II) $x>1$ ist, und $p, q, r\ldots$ eine fallende arithmetische Reihe ausmachen: so ist die Reihe summatorisch convergent.

Beweis.

§. 13. In beiden Fällen hat man eine geometrische Reihe, deren n erste Glieder ihre Summe $=\frac{x^p}{x^{q-p}-1}.(x^{(q-p)n}-1)$, für $n=\infty$ also die Summe $S=\frac{x^p}{x^{(q-p)}-1}(x^{(q-p)\infty}-1)$ ausmachen; welche in beiden Fällen sich dem endlichen Werthe $\frac{x^p}{1-x^{q-p}}$ ohn Ende nähert, weil $x^{(q-p)\infty}$ sich dem $=o$ unendlich nähernd ist.

Denn im Isten Falle $x=\frac{1}{u}$ gesetzt, mufs wegen $x<1$ offenbar $u>1$ seyn, mufs sich also $x^{(q-p)\infty}=\frac{1}{u^{(q-p)\infty}}$ dem $=o$ ohn Ende nähern.

Im IIten Falle soll schon x irgend ein $u > 1$ seyn; und da hier, wegen der arithmetischen fallenden Reihe $q - p$ verneint, folglich $p - q$ bejaht ist; so hat man $x^{(q-p)\infty} = u^{(q-p)\infty} = \frac{1}{u^{(p-q)\infty}}$, wiederum dem $= 0$ ohn Ende sich nähernd.

Zusatz 1.

§. 14. In beiden Fällen muſs auch die Reihensumme
$\mathfrak{S} = Ax^p + Bx^q + Cx^r + Dx^s + \ldots$ ohn Ende, einem endlichen Werthe sich nähern, wenn keiner unter den Coefficienten A, B, C, u. s. w. einen unendlich groſsen Werth hat. Denn sey G der gröſste unter allen, aber noch endlich: so müſste jene Reihensumme $\mathfrak{S}$ kleiner
als $G.S = Gx^p + Gx^q + Gx^r + Gx^s$ u. s. w. ohn Ende seyn, und doch schon G. S dem endlichen Werthe $G.\frac{x^p}{1 - x^{q-p}}$ sich nähernd seyn.

Anwendung.

§. 15. Da schon die Reihe
$\frac{y-1}{y+1} + \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \ldots$ für jedes bejahte y dem Falle I des Lehrsatzes unterworfen, ohn Ende fortgesetzt, dem endlichen Werthe
$\frac{y-1}{y+1} \cdot \frac{(y-1)^2}{(y+1)^2 - (y-1)^2}$ sich nähern müſste: so muſs einem noch kleineren endlichen Werthe die Reihe
$\frac{\log \text{nat } y}{2} = \frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y-1}\right)^5 + \ldots$
sich nähernd seyn.

Durch dieselben Gründe sind wir nun auch versichert, dafs für jede bejahte Gröfse des c die Reihe $\mathfrak{C} = \frac{c-1}{c} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{c-1}{c}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{c-1}{c}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{c-1}{c}\right)^4 + \ldots$ einem vom c abhängigen endlichen Werthe sich nähernd, summatorisch convergent seyn mufs; welches für die Logarithmik, wo sich diese Reihe als Ausdruck des $\frac{1}{\text{Subtangente}}$ eines jeden c-Systemes ergibt, um so mehr befriedigt, je bündidiger man sich überzeugt hat, dafs kein Logarithmensystem mit einer verneinten Basis c Statt finden kann.

Zusatz 2.

§. 16. Wenn von einer Reihe, die lauter gleich bezeichnete Glieder
P ; Q ; R ; S ; T ; U ; u. s. w. hat, ihre summatorische Convergenz erwiesen ist: so mufs auch jede solche Reihe summatorisch convergent seyn, welche lediglich durch Zeichenwechsel ihrer Glieder von jener unterschieden ist. Denn
wenn die Summe $P + Q + R + S + T + U \ldots$
einer endlichen Gröfse $\mp G$ näher und näher kommend ist: so mufs diese Summe
in einen Theil, $P + Q + S + T + \ldots$
und einen andern $R + U + \ldots$ zerlegt,
der eine Theil irgend einer endlichen Gröfse $\mp H$ und der andere irgend einer endlichen Gröfse $\mp I$ näher und näher kommend, und $\mp H \mp I = \mp G$ seyn.

Wenn daher von den beiden Theilreihen, die eine lauter bejahte, die andere lauter verneinte Glieder hat: so mufs die absolute Gröfse des G ein $= H - I$, also noch kleiner als die absolute Gröfse des $\mp G$ seyn.

Anwendung.

§. 17. Da $y = 1 = \frac{\log y}{1} + \frac{(\log y)^2}{1.2} + \frac{(\log y)^3}{1.2.3} + \frac{(\log y)^4}{1.2.3.4} + \ldots$ nach Lehrs. 2, §. 12, einem endlichen Werthe sich nähern mufs, wenn log y kleiner als 1 und bejaht ist: so mufs auch, wenn log y verneint, aber in absoluter Gröfse kleiner als 1 ist, die dafür sich ergebende Reihe

$$\frac{1}{y} = 1 - \log y + \frac{(\log y)^2}{2} - \frac{(\log y)^3}{2.3} + \frac{(\log y)^4}{2.3.4} - \frac{(\log y)^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

ebenfalls einem endlichen Werthe sich nähernd bleiben.

Ein anderes Beispiel sey die eben so merkwürdige Reihe

$$\log\text{nat}(1+y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + - \text{ohn Ende},$$

welche aus $= 1 + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \ldots$ ohn Ende

und $= -1.\left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \ldots \text{ ohn Ende}\right)$

die algebraische Summe ist. Da nun jede von diesen beiden bejahten Reihen unter dem Beding, dafs $y < 1$ sey, sich einem endlichen Werthe nähert: so mufs um so mehr die Differenz dieser beiden endlichen Werthe eine endliche Gröfse seyn.

§. 18. Ebenfalls neu wird die Bemerkung seyn, dafs es Reihen gibt, die anfangs sogar gliederdivergent (auch wohl abwechselnd divergent und convergent) sind, ihren letztern Theil aber dergestalt convergent haben, dafs sie im Ganzen genommen summatorisch convergent sind, ihre Summe nämlich einem endlichen Werthe sich nähernd ist. Von dieser Art ist die bekannte Reihe

$$y = 1 + \frac{\text{Log } y}{a^1} + \frac{(\text{Log } y)^2}{2\,a^2} + \frac{(\text{Log } y)^3}{2.3.a^3} + \frac{\text{Log } y}{2.3.4a} + \ldots$$

für einige Log y, daher man sie als unbrauchbar auch für die Theorie zu halten pflegt.

In der Logarithmetik (Differ. Cap. XI.) werde ich es darthun, dafs sie für jeden Log y summatorisch convergent, also für die Theorie schon hinreichend beweisend ist, dafs man für jeden Log y dem Werthe des y sich zu nähern weifs.

Eine practisch bequeme Brauchbarkeit können freilich nur solche summatorische Reihen gewähren, die von Anfang an gliederconvergent und stark convergirend sind.

Vorerinnerung V.

Merkwürdige Reihen aus der IIten Form der binomischen Reihe abgeleitet.

§. 1. Die gewöhnliche Form des binomischen Lehrsatzes ist:

$$(a + b)^n = a^n + n.a^{n-1}\,b + \frac{n.n-1}{1,2}.a^{n-2}\,b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1,2.3}.a^{n-3}\,b^3 + \ldots$$

§. 2. So lange man immerfort vergebne Versuche gemacht hatte, einen völlig bündigen und deutlichen elementarischen Beweis für diesen Satz zu finden, durch welchen es befriedigend dargethan wäre, dafs nicht nur für jede ganze bejahte Zahl n, welches leicht zu erweisen ist, sondern auch für jedes gebrochene, bejahte, verneinte, rationale auch irrationale und unmögliche n, die Reihe gültig bleibt; so lange war es allerdings gerathen, in der Differentialrechnung für $(x + dx)^n$ zuvörderst nur eine bejahte ganze Zahl n vorauszusetzen, und aus den dafür aufge-

fundenen Differentialen erst die etwa erwähnte Allgemeinheit des Lehrsatzes zu folgern.

Da mir indessen der Vortrag der Differentialrechnung dadurch unangenehm zerstückelt schien, und ich aus diesem Grunde schon in meinen Beyträgen zur Mathematik und Physik, Dessau 1785. St. III. einen bündigen und kurzen allgemeinen elementarischen Beweis zu geben suchte, auch dieser von andern für befriedigend anerkannt ist, und überdies nachher noch mehre dergleichen Beweise erschienen seyn sollen: so sehe ich mich berechtigt, jene Zerstückelung des Vortrages nicht nur, sondern auch die Erschwerung solcher Schlüsse, als wir z. B. im Cap. X. befolgen, zu vermeiden, und den obigen Lehrsatz in seiner ganzen Allgemeinheit sogleich zu benutzen; obgleich ich übrigens es hinterher gelegentlich auch zeigen werde, wie man mit der vorerwähnten Einschränkung desselben sich vorläufig begnügen, und vermittelst der dadurch erweisbaren Differentiale die Allgemeinheit des Binomialtheorems selbst erweisen kann.

§. 3. Aus den numerischen Coefficienten der obigen Reihe, in welcher man a^n als vorangehendes Glied betrachtet, und dann im allgemeinen rten, und $(r+1)$ten der nachfolgenden Glieder die numerischen Coefficienten $=$ $\frac{n.n-1.\ldots.n-(r-1).}{1.2.\ldots\ldots.r.}$ und $\frac{n.n-1\ldots.n-(r-1).n-r.}{1.\ 2\ \ldots.\ r\ .\ r+1.}$ hat, erhellet, dafs lediglich für solches n, welches irgend einer unter den bejahten ganzen Zahlen r gleich ist, die Reihe abbrechend, für jedes andre n aber ohne Ende fortlaufend ist; obgleich aus eben der erwähnten Abbrechung für $n=r$ erhellet, dafs auch $(a+b)^{-r}$ als $=\frac{1}{(a+b)^r}$ einen endlichen ganz bestimmten Bruch

ausmachen mufs; z. B. $(a+b)^{-2}$ als $= \frac{1}{(a+b)^2}$ auch $= \frac{1}{a^2+2ab+b^2}$ seyn mufs.

§. 4. In dieser Hinsicht haben schon andere Mathematiker eine zweite Form der obigen Reihe aufgestellt, deren Herleitung ich in Hinsicht des Gebrauches, welchen ich von ihr machen werde, rathsam finde, auf folgende Weise darzulegen.

Sey $\mathfrak{n}$ die Gegengröfse des n, also $\mathfrak{n}+n=o$ und $\mathfrak{n}=-n$, auch $n=-\mathfrak{n}$, es mag n seyn, welche bejahte oder verneinte Gröfse es wolle; so werden die numerischen Coefficienten der obigen Reihe, wenn man ihr n durch $\mathfrak{n}$ ausdrückt, eine andere Form gewinnen. Denn es ist dann:

$$n = -\mathfrak{n}$$
$$n.\,n-1. = -\mathfrak{n}.\,-\mathfrak{n}-1. = \mathfrak{n}.\,\mathfrak{n}+1.$$
$$n.\,n-1.\,n-2. = \mathfrak{n}.\,\mathfrak{n}+1.\,-\mathfrak{n}-2. = -\mathfrak{n}.\,\mathfrak{n}+1.\,\mathfrak{n}+2.$$

u. s. w.; also nun (§. 1.)

$$(a+b)^n = a^n - \mathfrak{n}.a^{n-1}b + \frac{\mathfrak{n}.\,\mathfrak{n}+1.}{1.\,2}.\,a^{n-2}b^2 - \frac{\mathfrak{n}.\,\mathfrak{n}+1.\,\mathfrak{n}+2.}{1.\,2.\,3}\,a^{n-3}\,b^3 + -$$

und $$(a-b)^n = a^n + \mathfrak{n}.a^{n-1}b + \frac{\mathfrak{n}.\,\mathfrak{n}+1.}{1.\,2}.\,a^{n-2}b^2 + \frac{\mathfrak{n}.\,\mathfrak{n}+1.\,\mathfrak{n}+2.}{1.\,2.\,3}.\,a^{n-3}\,b^3 + +$$

Jetzt werde $-b = -\frac{ab}{a+b}$ gesetzt, so hat man die linke Seite der Gleichung $= \left(\frac{aa}{a+b}\right)^n = \frac{a^{2n}}{(a+b)^n} = a^{2n}.(a+b)^{-n}$, also auch in der rechten Seite $b = \frac{ab}{a+b}$ gesetzt:

$$a^{2n}.(a+b)^{-n} = a^n + n.a^n.\frac{b}{a+b} + \frac{n.n+1.}{1.2}.a^n\frac{b^2}{(a+b)^2} + \frac{n.n+1.n+2.}{1.2.3}.a^n.\frac{b^3}{(a+b)^3} + + \ldots$$

Wird nun durch a^{2n} dividirt, und statt jedes dann vorhandenen $-n$ auch n geschrieben, so erhält man die andere Form der Binomialreihe, als:

$$(a+b)^n = a^n + n.a^n.\frac{b}{a+b} + \frac{n.n+1.}{2.2}a^n.\frac{b^2}{(a+b)^2} \frac{n.n+1.n+2.}{1.2.3}a^n.\frac{b^3}{(a+b)^3} + + \ldots$$

§. 5. Da nun n die Gegengröfse des ganz allgemeinen n ist, welches namentlich auch jede bejahte und verneinte Gröfse seyn konnte: so mufs auch n eben so allgemein, und namentlich auch jede verneinte und bejahte Gröfse bedeutend seyn; kann daher in dieser zweiten Form auch n statt n geschrieben werden; wodurch wir uns nun neben der obigen Iten Form des binomischen Theoremes

I) $$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}.a^{n-1}b + \frac{n.n-1.}{1.2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n.n-1.\ldots.n-(r-1).}{1.2\ldots\ldots\ldots r.}a^{n-r}b^r$$

II) auch $$(a+b)^n = a^n + n.a^n.\frac{b}{a+b} + \frac{n.n+1.}{1.2}.a^n.\frac{b^2}{(a+b)^2} + \ldots + \frac{n.n+1.\ldots.n+(r-1).}{1.2\ldots\ldots\ldots r.}a^n.\frac{b^r}{(a+b)^r}$$

als eine IIte eben so allgemein richtige Form aufstellen können; und aus den numerischen Coefficienten des allgemeinen $r$ten Gliedes ersehen, dafs mit diesem Gliede die Ite Reihe beendigt wird, wenn $n = r$ ist, und dagegen die IIte Reihe beendigt wird, wenn $n = -r$, also n irgend eine verneinte ganze Zahl ist.

§. 6. Da es in der Differentialrechnung (VI. §. 7.) dargelegt wird, dafs beide Reihen völlig einerlei genaue Differentialquotienten geben, in der Integralrechnung aber alles aus der Form der genauen Grössendifferentiale geschlossen wird, welche durch jene genauen Quotienten bestimmt ist: so können wir beim Integriren auch die zweite Form benutzen, ohne erst zu fragen, nach welcher Form man differenziirt habe, welches übrigens in der Regel allemal vermittelst der Iten Form geschehen wird. Beim Integriren aber dürfte man vermuthen, durch die IIte Form einige genaue Integrale zu finden, nach welchen man bisher vergebens gesucht hatte, welches doch der näheren Untersuchung werth ist.

Ueberdies aber ist es sogleich etwas werth, dafs uns die Wahl unter mancherlei convergenten Reihen, welche wir für ein gegebnes c^n vermittelst des Binomialtheorems uns verschaffen können, durch dessen IIte Reihe erweitert wird.

§. 7. Indem wir aus der Iten Reihe auf die folgende: $(a+b)^n =$

$$a^n\left\{1+n.\frac{b}{a}+\frac{n.n-1}{1.2}.\frac{b^2}{a^2}+\frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}.\frac{b^3}{a^3}\ldots\right\}$$ (A.

geschlossen haben: so können wir aus Vergleichung der beiden allgemeinen auf einander folgenden Glieder schliefsen, wie wir $c=a+b$ zu setzen, nämlich c in zwei solche Theile a und b zu zerlegen haben, dafs $\frac{n-r}{r+1}.\frac{b}{a} < 1$, also die Reihe vom rten Gliede an convergent werde, wobei ich hiermit ein für allemal erinnere, dafs die Zertheilung des c in $a+b$ auch verneinte Theile zuläfst.

§. 8. Indem wir auch aus der IIten Reihe (§. 5.) auf $(a+b)^n =$

$$a^n\left\{1+n.\frac{b}{a+b}+\frac{n.n+1.}{1.2}.\frac{b^2}{(a+b)^2}+\frac{n.n+1.n+2.}{1.2.3}.\frac{b^3}{(a+b)^3}\ldots\right\}(\mathfrak{A}.$$

schliefsen: so haben wir diese ebenfalls in Hinsicht der erwünschten Convergenz sehr lehrreiche Form sogleich unmittelbar vor Augen; da sie hingegen aus der ersten erst durch mancherlei Zeichenwechselung hervorgehen würde.

§. 9. Soll nun dergleichen Reihe A) oder $\mathfrak{A}$) zum Reihenausdrucke eines gegebenen c benutzt werden, so mufs $a+b=c$, also in der Reihe entweder $a=c-b$ oder $b=c-a$ gesetzt werden. Im ersten Falle bleibt in der Reihe selbst noch die b, im zweiten die a unserer Wahl überlassen; und eine von beiden pflegt man gerne $=1$ anzunehmen der bequemen Rechnung wegen.

§. 10. Aus der Reihe A.) können wir demnach auf die folgende B.) und aus der Reihe $\mathfrak{A}$ auf die folgende $\mathfrak{B}$) schliefsen.

$$\frac{c^n-a^n}{n}=a^n\left\{\frac{b}{a}+\frac{n-1}{2}.\frac{b^2}{a^2}+\frac{n-1.n-2.}{2.3}.\frac{b^3}{a^3}+\ldots\right\}(B.$$

$$\frac{c^n-a^n}{n}=a^n\left\{\frac{b}{c}+\frac{n+1}{2}.\frac{b^2}{c^2}+\frac{n+1.n+2.}{2.3}.\frac{b^3}{c^3}+\ldots\right\}(\mathfrak{B}.$$

§. 11. Wenn wir in diesen beiden Reihen entweder a oder b der Bequemlichkeit wegen $=1$ setzen, so erhalten wir die vier Reihen C, D, und $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.

$$\frac{c^n-1}{n}=1.\left\{c-1+\frac{n-1}{2}.(c-1)^2+\frac{n-1.n-2.}{2.3}.(c-1)^3+\ldots\right\}(C.$$

$$\frac{c^n-(c-1)^n}{n}=(c-1)^n.\left\{\frac{1}{c-1}+\frac{n-1}{2}.\frac{1}{(c-1)^2}+\frac{n-1.n-2.}{2.3}.\frac{1}{(c-1)^3}+\ldots\right\}(D.$$

$$\frac{c^n-1}{n}=1.\left\{\frac{c-1}{c}+\frac{n+1}{2}.\frac{(c-1)^2}{c^2}+\frac{n+1.n+2.}{2.3}.\frac{(c-1)^3}{c^3}+\ldots\right\}(\mathfrak{C}.$$

$$\frac{c^n-(c-1)^n}{n}=(c-1)^n.\left\{\frac{1}{c}+\frac{n+1}{2}.\frac{1}{c^2}+\frac{n+1.n+2.}{2.3}.\frac{1}{c^3}+\ldots\right\}(\mathfrak{D}.$$

In Hinsicht der uns bevorstehenden Anwendungen auf $n = o$ mufs ich noch beibringen, dafs man für den Quotienten $\frac{c^n - (c-1)^n}{n}$ aufser D und $\mathfrak{D}$ auch noch die beiden Reihen E und $\mathfrak{E}$, nämlich

$$\frac{c^n-(c-1)^n}{n} = c^n\left\{\frac{1}{c} - \frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{c^2} + \frac{n-1.n-2.}{2.3}\cdot\frac{1}{c^3} - \ldots\right\} \text{(E.}$$

$$\frac{c^n-(c-1)^n}{n} = c^n\left\{\frac{1}{c-1} - \frac{n+1.}{2}\cdot\frac{1}{(c-1)^2} + \frac{n+1.n+2.}{2.3}\cdot\frac{1}{(c-1)^3} \ldots\right\} \text{(}\mathfrak{E}\text{.}$$

erhält, wenn man dessen $(c-1)^n$ zuvörderst nach der Iten, und dann nach der IIten Binomialreihe entwickelt.

§. 12. Da nun alle diese Reihen, aus dem allgemein erwiesenen Binominaltheorem gefolgert, für jedes n gültig seyn müssen, so müssen sie es auch für $n = o$ seyn? Allerdings! Aber auch schon in der endlichen Analyse wird doch jeder das Bedürfnifs haben, diesen Uebergang aus einem $n =$ Etwas zu einem $n =$ Nichts sich dadurch zu rechtfertigen, dafs er sich n nach und nach kleiner und kleiner angenommen, und dadurch dem $n = o$ nach und nach genähert denkt.

§. 13. Um nun an solche Forderung für n erinnert zu seyn, wollen wir $n = dx$ schreiben, mit der ausdrücklichen Erinnerung, dafs wir hier dem dx eine andere Bedeutung nicht aufbürden wollen, als dafs wir uns unter dem $n = dx$ ein n verlangen, welches immerfort kleiner und kleiner angenommen gedacht werden soll, um es dadurch nach Möglichkeit $= o$ geworden zu erhalten, wobei übrigens dieses dx eine für sich bestehende, unabhängige Gröfse soll seyn können, wie es das n des binomischen Lehrsatzes, und namentlich auch von dessen a und b und $a + b = c$ ganz unabhängig ist; daher uns die Frage, ob etwa dx als Differential eines veränderlichen x gedacht werden könne, hier noch nichts angehen soll und kann,

§. 14. Gesetzt nun auch, dafs man es mit einigen und den meisten berühmten Lehrern nur wagen will, dieses $n = dx$ nach einem solchen Gesetze abnehmen zu lassen, nach welchem es zwar ohne Ende immerfort kleiner und kleiner werdend ist, niemals aber völlig $= o$ geworden seyn kann; z.B. wenn man nach und nach

$dx = \frac{1}{2}$; $= \frac{1}{4}$; $= \frac{1}{8}$; $= \frac{1}{16}$; u. s. w. ohn Ende,
oder $= \frac{1}{3}$; $= \frac{1}{9}$; $= \frac{1}{27}$; $= \frac{1}{81}$; u. s. w. ohn Ende,
oder $= \frac{1}{10}$; $= \frac{1}{100}$; $= \frac{1}{1000}$; $= \frac{1}{10000}$; ... ohn Ende,

besser $= \frac{1}{\infty}$; $= \frac{1}{\infty \cdot \infty}$; $= \frac{1}{\infty \cdot \infty \cdot \infty}$; ... ohn Ende genommen fordert, wo ∞ eine Zahl je grösser je besser, und selbst ohn Ende wachsend bedeuten soll: so wird doch auch von diesen Lehrern mit Recht behauptet, dafs e irgend eine endliche Gröfse bedeutend, jede Gleichung $e + dx = e + f$ als unrichtig zurückgewiesen werden kann, wenn f irgend eine angebliche Gröfse aufser $f = o$ bedeuten soll.

§. 15. Daher denn alle Lehrer darüber einig sind und seyn müssen, dafs in den obigen Reihen $n = dx$ gesetzt, $dx - 1 = -1$; $dx - 2 = -2$; und eben so $dx + 1 = +1$; $dx + 2 = +2$, u.s.w. angegeben werden müsse; wodurch wir nun folgende sechs Reihen erhalten:

$$\frac{c^{dx}-1}{dx} = 1\left\{\frac{c-1}{1} - \frac{(c-1)^2}{2} + \frac{(c-1)^3}{3} - \frac{(c-1)^4}{4} + \ldots\right\} \text{ aus (C.}$$

$$\frac{c^{dx}-(c-1)^{dx}}{dx} = (c-1)^{dx}\left\{\frac{1}{c-1} - \frac{1}{2(c-1)^2} + \frac{1}{3(c-1)^3} - \frac{1}{4(c-1)^4} + \ldots\right\} \text{ aus (D.}$$

$$\frac{c^{dx}-(c-1)^{dx}}{dx} = c^{dx}\left\{\frac{1}{c} + \frac{1}{2c^2} + \frac{1}{3.c^3} + \frac{1}{4c^4} + \ldots\right\} \text{ aus (E.}$$

$$\frac{c^{dx}-1}{dx} = 1\left\{\frac{c^c-1}{c} + \frac{(c-1)^2}{2c^2} + \frac{(c-1)^3}{3.c^3} + \frac{(c-1)^4}{4.c^4} + \ldots\right\} \text{ aus (C.}$$

$$\frac{c^{dx}-(c-1)^{dx}}{dx} = (c-1)^{dx}\left\{\frac{1}{c} + \frac{1}{2c^2} + \frac{1}{3c^3} + \frac{1}{4c^4} + \ldots\right\} \text{ aus (D.}$$

$$\frac{c^{cx}-(c-1)^{dx}}{dx} = c^{dx}\left\{\frac{1}{c-1} + \frac{1}{2(c-1)^2} + \frac{1}{3(c-1)^3} + \frac{1}{4(c-1)^4} + \ldots\right\} \text{ aus (E.}$$

§. 16. Statt eines jeden $(c-1)^{dx}$ oder c^{dx} in der rechten Seiten dieser Gleichungen kann man ohne Bedenken $= 1$ setzen, weil für $dx = 0$ geworden $c^{dx} = c^0 = 1$ und eben so auch $(c-1)^{dx} = (c-1)^0 = 1$ geworden seyn mufs. Auch in der linken Seite mufs man allerdings der strengsten Wahrheit gemäfs behaupten, dafs mit $dx = 0$ auch $\frac{c^{dx}-1}{dx} = \frac{c^0-1}{0} = \frac{1-1}{0}$ $= \frac{0}{0}$ geworden seyn mufs, und jede von den beiden dafür gefundenen Reihen C) und E) geben den Werth dieses $\frac{0}{0}$ für jedes c an.

§. 17. Allerdings ist es eben so ausgemacht, dafs man auch im $\frac{c^{dx}-(c-1)^{dx}}{dx}$ jedes $dx = 0$ geworden fordern kann, für völlige Strenge auch fordern mufs, also dieser Quotient in völliger Strenge $= \frac{c^0-(c-1)^0}{0}$ $\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ geworden ist, und jede dafür gefundene Reihe den Werth dieses $\frac{0}{0}$ angiebt.

§. 18. Wenn man aber die für dieses $\frac{0}{0}$ gefundenen Werthe mit denen des vorigen $\frac{0}{0}$ vergleichen will; so liegt vor Augen, dafs der Quotient $\frac{c^{dx}-(c-1)^{dx}}{dx} = \frac{c^{dx}-1}{dx} - \frac{(c-1)^{dx}-1}{dx}$ ist, folglich z.B. zu der Reihe D) noch die Reihe $\frac{c-2}{1} - \frac{(c-2)^2}{2} + \frac{(c-2)^3}{3} - \frac{(c-2)^4}{4} \ldots$ addirt werden müfste, um den Werth des Quotienten $\frac{c^{dx}-1}{dx}$ auf diese Weise zu erhalten.

§. 19. Dieses habe ich hier erörtern wollen, weil es immer noch sehr achtungswerthe Analysten giebt, welche an einigen Orten ihres Vortrages, mehr in der Grundlage, als in der Anwendung ihres Vortrages, Bedenken tragen, von dergleichen dx zu verlangen, dafs es wirklich bis auf $=0$ abnehmen soll; eben dadurch aber auf die kürzeste, netteste und strengste Aussprechung des Infinitesimalcalculs Verzicht leisten müssen! Wie mühselig würde man den Wahrheiten, welche jene Reihen darstellen, nur immerfort sich nähernd sich ausdrücken müssen, wenn man die wirkliche Vernullung, das wirklich $=0$ **geworden** scheuet. Alle sonst noch dagegen vorhandenen Vorurtheile werden wir an ihren Orten ebenfalls widerlegen.

§. 20. Die obigen Reihen mufsten mir ferner einer solchen Darstellung werth scheinen, weil alle diejenigen Lehrer, welche die Theorie der Logarithmen auf den Werth des Quotienten $\frac{c^{dx}-1}{dx}$ begründen, bisher nur auf die erste Reihe bei C) (§. 15.) gekommen sind, und indem sie dieselbe nur für die c nicht gröfser als 2, convergent erkannten, für die übrigen c nur so viel daraus zu schliefsen wagten, dafs diese Reihe **irgend einen** von c abhängigen **constanten** Werth haben müsse, den sie dann erst vermittelst anderer Reihen zu fassen wufsten. (M. s. Lacroix Traité élémentaire de calcul différential §. 23—25.)

Wir haben dagegen **durch den Gebrauch der IIten Binomialreihe** sogleich auch die Reihe

$$\mathfrak{C}) \quad \frac{c^{dx}-1}{dx} = \frac{c-1}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{c}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{c-1}{c}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{c-1}{c}\right)^4 + \ldots$$

gewonnen, welche offenbar für jedes bejahte c nicht nur **von Anfang an gliedereonvergent**, sondern nach Vorerinn. IV. §. 15. auch **summatorisch** convergent ist.

Vorerinnerung VI.

Geometrische und arithmetische Dimensionen.

§. 1. Die Gröfse a + b im obigen Binomialsatze, welche zur nten Potenz soll erhoben werden, und eben so auch jede andere ein- oder mehrgliedrige Gröfse, welche zu irgend einer ganzen oder gebrochnen, bejahten oder verneinten Dignität soll erhoben werden, mag die Stammgröfse genannt werden, weil der Ausdruck Grundgröfse und Wurzelgröfse anderweitig nöthig ist.

§. 2. Wenn die Stammgröfse als Gröfse von einer Dimension gegeben ist, oder als solche betrachtet wird; so mufs die nte Potenz derselben, n dergleichen Dimensionen enthalten, auch in jedem ihrer einzelen Glieder, weil ja nur Gröfsen von gleich vielen Dimensionen einander additiv und subtractiv seyn können.

Es ist sehr rathsam, auf solche durchaus nothwendige Dimensionen-Richtigkeit schon in der Algebra bei Behandlung der geordneten Gleichungen aufmerksam zu machen, z. B. bei der kubischen Gleichung

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = o$$

zuförderst darauf aufmerksam zu machen, dafs, x etwa als Linie gegeben, oder gedacht, dann x^3 ein Kubus sey, also auch Ax^2, und Bx und C einen körperlichen Raum nothwendig angeben müsse, also eben so nothwendig der Coefficient A eine Linie, B eine Fläche, und C irgend eine Raumgröfse von drei Dimensionen ebenfalls seyn müsse.

§. 3. Da in den geordneten Gleichungen der Algebra nur ganze, bejahte Dimensionen vorkommen: so ist es hier am leichtesten, die nöthige Dimensionen-

richtigkeit zu begreifen, auch in den Coefficienten A, B, C ihren dimensorischen und numerischen Factor von einander unterscheiden, auch den letztern durch dimensorische Einheiten 1 oder 1.1 oder 1.1.1 sich ergänzen, und dadurch aus Zahlengrößen in dimensorische, und umgekehrt übergehen zu lassen. Die getheilten, gebrochnen Dimensionen gehen dann, um mich in der Kürze hier so auszudrücken, einige Zeit hindurch gutwillig mit, bis man durch deutlichen Einblick in die Rechnung mit gebrochnen Potenzexponenten, und in die logarithmische Messung, auch diese Gutwilligkeit erklären und rechtfertigen lernt.

§. 4. Weil die Dimensionenlehre, meiner Ueberzeugung nach, bei weiten das rathsamste Hülfsmittel ausmacht, um sich eine völlig befriedigende Einsicht in die Gewinnung und Benutzung der Differentialquotienten zu verschaffen: so will ich noch folgendes darüber beibringen, welches mir vor etwa 40 Jahren bei Lesung des Organon und der Architectonik von Lambert entstanden war, und die eben erwähnte Einsicht etwa 10 Jahre später zu gewähren anfing, als ich immerfort neue Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf mechanische und hydraulische Technik zu machen hatte.

§. 5. Der Begriff von Dimension ist ursprünglich geometrisch. Im Rechtecke x.y ist längs der einen lineären Dimension x die andere y gleichförmig verbreitet, die eine der andern, als ein Prädicat dem Subjecte zugeeignet, und im Parallelepipido x.y.z ist die dritte Dimension z über einer jeden der beiden vorigen, also auch über der Ebne xy gleichförmig verbreitet; auch hier der Ebene xy die dritte Dimension z, und umgekehrt die Ebene xy der Linie z als ein Prädicat dem Subjecte durchaus zugeeignet.

§. 6. Dafs jede zwei Dimensionen, als solche, an Richtung nichts mit einander gemein haben, also einander normal*) seyn müssen, also das Verbreiten durch Bewegung construirt, einen Parallelismus des Bewegten erfordert, und sich hierdurch die reine Verbreitung von der unreinen unterscheiden liefse, will ich hier nur kurz berühren, weil wir es hier nur mit der reinen zu thun haben wollen, auch für jetzt nur mit der gleichmäfsigen, das heifst: während der Verbreitung soll das Verbreitete von gleichbleibender Gröfse gedacht werden; es mag übrigens dasselbe, Linie oder Ebne, so veränderlich seyn, als es will.

Auch werden wir in dieser Hinsicht wohl thun, uns die Verbreitung momentan, im Zeitpuncte vollendet zu denken, und von der geometrischen Construction, welche Bewegung, also Zeitdauer erfordert, zu abstrahiren.

§. 7. Die geometrische Dimensionen-Vorstellung ist allerdings gar sehr geeignet, in diese Lehre anschaulich einzuleiten, übrigens aber reicht sie nur für drei Dimensionen aus, weil mit der dritten Dimension die Zueignung des Raumes vollendet ist.

Indessen wird man selbst auch da, wo Geometrie auf andere Mathematik angewandt wird, gar häufig das Bedürfnifs finden, Gröfsen von mehr als drei Dimensionen sich vorzustellen.

Die Zeit ist eine stetige Gröfse, wie eine Linie; die Geschwindigkeit ist ebenfalls eine Gröfse, welche stetig zunehmend seyn kann. Geschwindigkeit ist

*) Normal, dem altgeometrischen Instrumente Norma gemäfs zu sagen, ist schicklicher als senkrecht. Ist es schicklich, von zwei einander rechtwinkligen horizontalen Linien zu sagen, dafs sie einander senkrecht seyen?

Gröfse der Bewegtheit, und Bewegtheit ist der im Zeitpuncte schon völlig gegenwärtige Zustand eines Körpers, durch dessen Fortdauer (Fortsetzung in der Zeit) eine Raumlänge beschrieben wird. Dergleichen von einem körperlichen Puncte durchlaufene Raumlänge, ist also ein Product aus Geschwindigkeit und Zeit. Bei gleichbleibender Geschwindigkeit c hat sich dieselbe der Zeitdauer t gleichförmig zugeeignet, und mufs daher als Rechteck c. t construirt, sogleich als eine Gröfse von zwei Dimensionen sich darstellen.

Der bewegte Körper sey nicht gerade ein Punct, sondern eine Masse von angeblicher Gröfse, so ist ihr Volumen, ihre geometrische Gröfse, allein schon einer solchen Gröfse von drei Dimensionen A, B, C gleich, mufs uns also der durchlaufene Raum schon als eine Gröfse von 5 Dimensionen A. B. C. c. t sich behaupten.

Gesetzt diese bewegte Masse werde, wie es in unserer ganzen Mechanik gewöhnlich ist, durch ihr Gewicht angegeben, und das Gewicht der cubischen Einheit sey $= 4$ ℔, so ist das Product aus dem Gewichte der bewegten Masse und der Geschwindigkeit, welches man mechanisches Moment nennt, nach obiger Darstellung ein c. A. B. C. 4 ℔, und die sogenannte Bewegungsgröfse während der Zeit t, sogar ein c. t. A. B. C. 4 ℔ eine Gröfse von 6 Dimensionen, (weil man ja jede 2 von diesen Factoren als ein Rechteck construiren könnte, dessen beide Dimensionen sich über einander gleichförmig verbreiten) falls man die 4 ℔. als eine Dimension behandeln will. Man ist aber eben so gut auch berechtigt, diesem Producte schon 7 Dimensionen zuzuschreiben, weil man jede benannte Zahl als eine Gröfse von zwei Dimensionen construirt denken kann,

z. B. die 4 ℔ als ein Rechteck, für dessen eine Dimension die Zahl 4, und für dessen andre Dimension die Gröfse ℔ angelegt sey.

§. 8. Allerdings habe ich hier schon die diskrete Gröfse, 4 ℔, mit hineingebracht; aber auch wenn mehre diskrete Gröfsen in einander multiplicirt werden, kann man sagen, dafs sich der eine Factor über den andern gleichförmig verbreitet, der eine Factor seiner Gröfse, sich jeder Einheit des andern zueignet. Wo diese Zueignung nicht statt findet, eine contradictio in adjecto ausmachen würde, da mufs man nicht multipliciren wollen.

§. 9. Da alle Zahlfactoren schlechthin, alle sogenannte unbenannte Zahlen, als Factoren einander zugeeignet werden können; z. B. in 2. 3. die 3 jeder Einheit der 2, wodurch man 2 mal 3 = 6 erhält; oder auch die 2, jeder Einheit der 3, wodurch man 3 mal 2 = 6 erhält: so hat man in Hinsicht der möglichen oder unmöglichen, schicklichen oder unschicklichen Zueignung nur auf die Realfactoren zu achten; ob ihre gegenseitige Zueignung schicklich und für das dahin gehörige wissenschaftliche System gemein brauchbar sey, und deshalb als eine besondere Einheit von zwei, drei, oder mehren Dimensionen besonders bekannt sey. Z. B. 3 Zoll mal 4 Zoll sind = 3 mal 4 mal 1 Zoll; da nun 1 lineärer Zoll einem andern lineären Zoll zugeeignet, gleichmäfsig über demselben verbreitet, allerdings einen Quadratzoll ausmacht: so ist dieses Product = 12 Quadratzoll.

Ferner 3 Fufs Entfernung vom Hypomochlio, und 4 ℔ Druck, gibt zum Producte 3 Fufs Entfernung mal 4 ℔ Druck = 12 Fufs-Pfund statisches Moment. Da es nämlich für die Praxis nicht schicklich wäre, die Messungen solcher Momente auf ein für allemal bestimmte Längen- und Gewichtseinheiten einzu-

schränken: so würde der Ausdruck 12 mechanisches Moment noch gar zu wenig bestimmend seyn, indefs er dagegen durch Hinzufügung dieser beiden sächlichen Einheiten durchgreifend bestimmt wird.

§. 10. Keineswegs sollen dergleichen Namenproducte, Quadratzoll und Kubikzoll etwa ausgenommen, schon den Anfängern in der Arithmetik erlaubt werden. Den Schülern der Regel de tri habe ich selbst, in meinem gemeinverständlichen Rechenbuche es eingeschärft, dafs zwei benannte Zahlen als solche nicht in einander multiplicirt werden sollen, dafs auch von Niemand es jemals verlangt werde; z. B. 3 ℔ Waare mit 4 ß zu multipliciren, sondern das Facit sey $= \frac{3\ ℔.\ 4\ ß.}{1\ ℔} =$ 3 mal 4 ß. indem durch die unbenannte Zahl 3 angegeben wird, dafs 3 ℔ gerade 3 mal mehr als 1 ℔ ist.

§. 11. Hier aber, wo es darauf ankommt, die schwierigen Operationen des Differential- und Integralcalculs nicht durch gar zu viele Verhältnifs-Zerlegung gar zu abstract und mühselig, sondern durch kurze Ausdrücke anstellig und anschaulich zu machen, erinnere ich auch für das eben hergesetzte Beispiel aus der Regel de tri, dafs durch den Divisor ℔ dem Dividenden die Dimension entnommen wird, und so durch jede angezeigte Division verlangt wird, dem Dividenden die Dimensionen des Divisors zu entnehmen; auch dieses allemal müsse geschehen können, und geschehen seyn, wo man den Quotienten anzugeben weifs, und angegeben hat. Dieser Ausspruch ist nun völlig allgemein und durchgreifend, wenn ich nur noch hinzufüge, dafs wir oben zwar von dem Begriffe geometrischer Dimensionen ausgegangen sind, diesen aber mit Lambert dergestalt abstrahirt ausgedrückt haben, dafs auch jede unbenannte Zahl als eine

Gröfse von beliebig vielen Dimensionen deshalb betrachtet werden kann, weil man sie als ein Product von beliebig vielen Factoren betrachten kann, indem von diesen Factoren weder die Einheiten 1 noch die Brüche ausgeschlossen sind.

Hat man $\frac{12}{3} = 4$, so ist es das schicklichste, den Dividend als Product 4. 3 zu betrachten; dem durch den Divisor $= 3$ diese Dimension soll entnommen werden.

Hat man $\frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$, so ist der Dividend als $7.\frac{30}{7}$ zu betrachten, dem durch den Divisor 7 diese Dimension entnommen wird, und seine übrige zweite Dimension $\frac{30}{7}$ als den Quotienten, auch $= 4\frac{2}{7}$ angibt.

§. 12. Allerdings wird man sich nun bei der Ausübung oft veranlafst finden, statt der Dimensionen sich nur Factoren zu denken, besonders wenn man neben den Zahlfactoren auf Realfactoren zu denken gewohnt ist, wie es durch die Vorstellung 3.4 lb schon gerechtfertigt wird.

Aber die Erinnerung an das Einerlei der Dimensionen und Factoren hat hier vielfachen Nutzen, wovon ich nur den einen, meines Erachtens sehr wichtigen und eigenthümlichen, anders unersetzlichen, folgenden, noch beibringen will.

§. 13. Durch die Geometrie der Alten wird man belehrt, dafs Linien den Flächen, und Flächen den Körpern, weder additiv noch subtractiv sind, die Linie als Flache betrachtet, eine o, die Fläche als Körper betrachtet eine o ist, auch wenn die Linie als solche, die Fläche als solche, eine noch so beträchtliche Gröfse ausmacht. Haben wir uns daran ge-

wöhnt, jedes Product 3. x und 4. 7 als eine Gröfse von zwei Dimensionen, = einer Fläche zu betrachten; so sind wir überzeugt, dafs wo x = o geworden ist, die Gröfse 3. x = 3. o als Product, = o geworden seyn mufs, und daher zu 4. 7 addirt verlangt, einen von 4. 7 + o nicht verschiedenen Flächenraum geben mufs; bei dem allen aber der Quotient $\frac{3x}{x} = 3$ geben mufs. Ebenfalls nur vermittelst der Hinsicht auf Dimensionen-Darstellung wird man auf den Begriff des Differentialquotienten als Endgränze anschaulich hingeführt.

§. 14. In unserer neuen mehr arithmetischen Behandlung der Geometrie, und durch die uns nothwendig gewordene genauere Beachtung des Unendlich grofswerdens, sind wir genöthigt zuzugestehen, dafs einige unendlich grofse Linien und einige unendlich kleine Linien einem Producte $\infty . o$ ohne Ende sich nähernd sind, welches einem endlichen Flächenraume gleich geachtet werden mufs.

Ich denke in der Folge den einzigen Grund dieser Nothwendigkeit dergestalt darzulegen, dafs eben dadurch dieser Fall als eine solche Ausnahme von der Regel dargelegt wird, dafs sie die Analysten zu gewissen, dadurch veranlafsten anderweitigen Fehlschlüssen schlechterdings nicht hätte verleiten sollen und können.

Vorerinnerung VII.

Unterscheidung zwischen dem werdenden und dem vollgewordenen Unendlichen. Verschiedene Grade des Unendlichen. Gleichzeitige Gleichheit der unendlich werdenden Gröſsen.

§. 1. Wenn in dem divisorischen Ausdrucke $\frac{1}{\infty} = q$ der Divisor ∞ eine immerfort wachsende Gröſse bedeutet: so muſs als Quotient q, eine immerfort abnehmende, immerfort kleiner werdende Gröſse ihm zugehören; und dieses $q = \frac{1}{\infty}$ muſs ohne Ende kleiner werdend seyn und bleiben, wenn ∞ ohne Ende gröſser werdend ist und bleibt.

§. 2. Dergleichen immerfort kleiner und niemals gleich Null werdende Gröſse wäre die immerfort übrig bleibende Luftmenge im Recipienten der Luftpumpe wenn die Bedingungen fortdauern, unter welchen von der anfänglichen Menge A, nach n maliger Ausleerung des Stiefels $= b$, noch die Luftmenge $A. \left(\frac{a}{a+b}\right)^n$ übrig bleibt, dessen a den Raum des Recipienten bedeutet.

Sey z. B. $b = 9.a$, so hat man nach n maligem Pumpen die übrige Luftmenge $= A. \left(\frac{1}{10}\right)^n$, welches für $n = \infty$, als $= \frac{A}{10^\infty}$, zwar immerfort kleiner werdend, aber niemals völlig $= 0$ erreichend ist.

Auch die Reihe der Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ u. s. w., deren Nenner dem Gesetze der Verdoppelung unterwor-

fen sind, mufs ohne Ende immerfort kleiner und kleiner werdend fortgehen, ohne jemals auf ein Glied $= 0$ gekommen zu seyn.

Eben dieses gilt auch von der Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, u. s. w., wo die Nenner einem noch einfacheren Gesetze des Wachsens, demjenigen der natürlichen Zahlenreihe unterworfen sind.

§. 3. Es ist auch überhaupt sehr einleuchtend, dafs $q = \frac{1}{\infty}$ in unserer Vorstellung immer nur ohn Ende kleiner werdend, niemals völlig $= 0$ werdend sich ergeben kann, so lange wir uns das immerfort gröfser werdende ∞ durch Zahlen vorgestellt fordern.

§. 4. Dagegen aber ist es ebenfalls völlig ausgemacht, dafs es namentlich auch unter denen Gröfsen, welche wir in reiner und angewandter Mathematik der Rechnung zu unterwerfen suchen müssen, sehr viele gibt, welche nicht nur anfangs immerfort kleiner werdend, sondern auch am Ende $= 0$ werdend und geworden sind.

Dergleichen ist in der Geometrie der Winkel zwischen zwei geraden Linien, welche einander gleichliegend werdend, und gleichliegend geworden seyn sollen; in der Trigonometrie, der $\cos\varphi$, wenn $\varphi = 90°$ werdend und geworden seyn soll; in der Phoronomie, jede mit endlicher Geschwindigkeit während t durchlaufene Raumlänge, wenn wir uns die Zeit t bis zu einem Zeitpuncte verkleinert denken; in der Mechanik die Fallhöhe eines schweren Körpers, wenn wir uns die Zeit des Fallens bis zu ihrem Anfangspuncte $= 0$ verkleinert denken; u. dergl. mehr.

§. 5. Da wir nun in aller Schärfe richtig nur $\frac{1}{\infty} = c$ haben, wenn uns c eine Gröfse bedeutet,

die sich der Null immerfort nähert, indem ∞ eine immerfort noch wachsende Gröfse bedeutet: so mufs dagegen $\frac{1}{0} = \infty$ ein Vollgrofses, eine Gröfse bedeuten, die allen *ihr möglichen* Wachsthum vollendet hat.

Dergleichen ist $\text{tg}\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.1$, wenn $\varphi = 90^\circ$ geworden ist, also dieser Linie Endpunct seine Entfernung ins Unendliche vollendet hat; denn als einer trigonometrischen Tangente kann ihr ein Wachsthum an ihrem Anfange, wo sie den Kreis berührt, gar nicht zukommen.

Dagegen gehört es zum Begriffe zweier geraden Parallellinien, sich zwei gerade Linie in einer Ebne zu fordern, von welchen jede nach ihren beiderlei Richtungen allen ihr möglichen Wachsthum vollendet haben könnte, ohne die andern getroffen zu haben.

§. 6. Indem nun unser, dem $\frac{1}{0}$ entsprechendes ∞, nie wie ∞ ein ohn-Ende Gröfserwerdendes, sondern ein Unendlichgrofs gewordenes bedeutet: so mag es etwa kürzer ein Vollgrofs genannt werden; könnte überdies auch ein Uebergrofs heifsen, so wie die Null der gemeinen Arithmetik ein Ueberklein ist.

Denn in der gemeinen Arithmetik sind alle Gröfsen, welche ihr unterworfen werden, vermittelst der Mafsleiter

0, 1, 2, 3, 4 ....

(und vermittelst der dazwischenfallenden Brüche) zu messen. Nur der algebraischen Arithmetik gehört die Mafsleiter

$\ldots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4 \ldots$

dergestalt zu, dafs man in ihr auch Zahlen, kleiner als Null, verneinte Zahlen hat. (Man findet die-

ses ausführlicher gerechtfertigt und als nothwendig für unsere Algebra bewiesen, in meinem Ersten Unterricht in der algebraischen Auflösung arithmischer und geometrischer Aufgaben. 2te Auflage. Freiberg 1806.)

In der gemeinen Arithmetik kann, für die Null sowohl, wie für irgend ein anderes Zahlziehen, die Frage nicht entstehen, ob es etwas Bejahtes oder Verneintes bedeuten solle. Auch in der algebraischen Mafsleiter mufs die Null an sich weder bejaht noch verneint seyn; keinesweges nach Belieben für bejaht oder verneint geachtet werden.

Weil es aber sehr einleuchtend sowohl ein $-\infty$ als ein $+\infty$, sowohl ein $-\infty$ als ein $+\infty$, auch z. B. in der Trigonometrie, tang $90° = +\infty$ und tang. 3. $90° = -\infty$ gibt: so mufs man auch ein $\frac{1}{+\infty} = +0$ und $\frac{1}{-\infty} = -0$ zugestehen, und nachzuweisen wissen; welches nun allemal darin zu suchen ist, dafs die $+0$ eine niedrigste Gränze bejahter Gröfsen, und die -0 die eine (algebraisch höchste) Gränze verneinter Gröfsen ausmacht.

§. 7. Wenn wir daher von einer $=0$ werdenden und gewordenen Gröfse es wissen, dafs sie bei diesem $=0$ werden, eine bejahte Gröfse war: so haben wir durch ihr Verschwinden ein $\frac{1}{+0} = +\infty$. Dagegen wissen wir durch ihr Verschwinden ein $\frac{1}{-0} = -\infty$ erhalten zu haben, wenn sie während dieses Verschwindens, während dieses $=0$ werdens, eine verneinte Gröfse war.

Z. B. wenn in dem Bruche $\frac{1}{f-g}$ nur g veränderlich, und dem $=f$ sich nähernd gedacht wird,

auch $\frac{1}{f-g}^{(g=f)}$ bedeutet, was aus $\frac{1}{f-g}$ geworden seyn muſs, wenn $g=f$ geworden ist: so kann man daraus, daſs hier $f-g=o$ geworden ist, weiter nichts schlieſsen, als daſs $\frac{1}{f-g}^{g=f} = \frac{1}{o} = \infty$ schlechthin geworden ist, ohne über das algebraisch Bejaht- oder Verneintseyn dieser o und dieses ∞ irgend etwas mehres bestimmt zu wissen, als daſs dieses schlechthin sich ergebende ∞ in einem richtig angelegten algebraischen Calcul als das Bejahte zu behandeln sey, wie ich ebenfalls am angeführten Orte als nothwendig erwiesen habe).

Für jedes $-\frac{1}{f-g}^{(g=f)} = -\frac{1}{o} = -\infty$, ist dann nur gewiſs, daſs es die Gegengröſe des vorigen schlechthin sich ergebenen ∞ seyn müsse.

§. 8. Wenn wir aber mit dem algebraischen Calcul in Richtigkeit bleiben, und alle seine Aussprüche mit Sicherheit treffend auslegen wollen: so müssen wir auch wissen, welches $f-g=o$ als eine $+o$, welches als eine $-o$ sich ergebe; und hier müssen wir nun allemal entweder

$\frac{1}{f-g} = \frac{1}{+o} = +\infty$ oder $\frac{1}{f-g} = \frac{1}{-o} = -\infty$

haben; das erste in dem Falle, wenn g während seines $=f$ werdens kleiner als f war, also $f-g$ bejahte Gröſsen waren; das zweite in dem Falle, wenn g während seines $=f$ werdens, gröſser als f war, also $f-g$ verneinte Gröſsen waren.

(Wie nöthig diese Unterscheidung und Erklärung der $\pm o$ längst schon gewesen wäre, kann die berüch-

tigte Aufgabe in Eulers höherer Mechanik bezeugen, für welche die berühmtesten Mathematiker fast ein Jahrhundert hindurch eine schickliche Auflösung zu finden immerfort vergebens versucht hatten; die sich mir vermittelst des gehörig betrachteten ± 0 auf den ersten Angriff einleuchtend ergab. (Hesperus 18.)

Ferner wird man in einem letzteren Capitel der Differentialrechnung auch zugestehen müssen, dafs ich mich, ohne die deutliche Unterscheidung zwischen der $+0$ und -0 mit und neben dem $\pm\infty$ auf die dortigen neuen Untersuchungen gar nicht hätte einlassen können!

§. 9. Soll eine Gröfse nur heifsen, was vermehrt und vermindert werden kann*), so ist das ∞ nur Gröfsengränze, weil das ∞ schlechthin, das ∞ der gemeinen Arithmetik, und auch das $+\infty$ der algebraischen, nur vermindert, nicht auch vergröfsert werden kann, das algebraische $-\infty$ nur algebraisch vergröfsert, nicht auch verkleinert werden kann.

Die absolute Null in der gemeinen Arithmetik kann nur vermehrt, nicht vermindert werden, weil es in der Mafsleiter der gemeinen Arithmetik etwas kleineres als 0 nicht geben kann.

Die absolute Null der Algebra aber, ist eine Gröfse, weil sie vermittelst der bejahten Gröfsen

*) Ich mufs wohl dieser Definition, als mir bekannt, hier ausdrücklich erwähnen, weil es auch unter den Mathematikern solche Systematiker gibt, welche jede Erweiterung oder Berichtigung der Wissenschaft, Falls sie einer bisher angenommenen Definition nicht gemäfs scheint, eben deshalb zu verwerfen geneigt sind; obgleich meines Erachtens lieber der erweiterten wissenschaftlichen Ansicht gemäfs die Definition zu erweitern, als der alten Definition zu Gefallen, die Wissenschaft unerweitert beizubehalten ist.

vermehrt werden kann, vermittelst der verneinten aber eben so gut kann vermindert werden; indefs dagegen die $+o$ nur eine niedrigste Gränze der bejahten Gröfsen und die $-o$ nur eine höchste Gränze der verneinten Gröfsen ausmacht.

§. 10. So sorgfältig ich nun auch hie und da zwischen dem ∞ und dem ∞ als einer noch immerfort gröfser werdenden Gröfse, und dem wirklich gewordenen Vollgrofs, eben so auch zwischen dem $\frac{1}{\infty} = \epsilon$ und $\frac{1}{\infty} = o$, als einer noch immerfort kleiner werdenden Gröfse und dem wirklich gewordenen Nichts unterscheiden werde: so werde ich doch meistens der gewöhnlichen Zeichen der Mathematiker des $\frac{1}{\infty}$ und des ∞, und ihrer gewöhnlichen Ausdrücke, unendlich klein und unendlich grofs, um so mehr mich bedienen können, je mehr es sich ergeben wird, dafs wir fast allemal unter $\frac{1}{\infty}$ eine Gröfse zu verstehen haben, die gleich Anfangs schon sehr klein angenommen, dann zuvörderst (und wie wir in der Folge hinzufügen werden, stetig) kleiner werdend gedacht werden soll, bis sie wirklich $= o$ geworden ist, und somit auch das ∞ allen ihm möglichen Wachsthum vollendet haben, also wirklich $= \infty$ geworden seyn mufs.

Verschiedene Grade des Unendlichgrofs und Unendlichklein.

§. 11. Man mag sich unter ∞ ein schon vorhandenes Vollgrofs, oder das noch unendlich gröfser werdende ∞ denken, in beiden Fällen mufs $\infty^2 = \infty . \infty$, auch $\infty^3 = \infty . \infty . \infty$ u. s. w. bedeuten; mufs also

∞^2 unendliche mal gröfser als ∞, und $\infty^3 = \infty . \infty^2$ wiederum unendlich mal gröfser als ∞^2 seyn.

Da dann $\infty^{-2} = \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty\infty}$ bedeutet: so mufs ∞^{-2} unendlich mal kleiner, als das selbst schon Unendlichkleine $\frac{1}{\infty}$ seyn, u. s. w.

Daher man ∞^n ein Unendlichgrofses vom nten Grade, und ∞^{-n} ein Unendlichkleines vom nten Grade nennt, und dann auch leicht durchsieht, dafs es auch gebrochene Grade dieser Unendlichen geben mufs, auch n selbst wiederum unendlich grofs mufs werden können.

Unterscheiden wir zwischen ∞ und ∞, so wissen wir, dafs auf das völligste $\frac{1}{\infty} . \frac{1}{\infty} = 0 . 0$ und überhaupt $\left(\frac{1}{\infty}\right)^n = 0^n$ geworden seyn, dagegen $\left(\frac{1}{\infty}\right)^n = c^n$ dem 0^n nur immerfort sich nähernd bleiben mufs.

Gleichzeitige Gleichheit aller neben einander gebrauchten ∞.

§. 12. Einleuchtend ist

$1 : A = A : AA = AA : AAA$ u. s. w.

A mag seyn welche beständige Gröfse es will.

Da ebenfalls $1 : x = x : xx = xx : xxx$ u. s. w. behauptet wird, wenn x eine veränderliche Gröfse bedeutet: so mufs damit, (wie es ja auch z. B. bei der Gleichung $ax = xx$ der Fall ist) nur behauptet werden, dafs diese Proportionen für jeden einzelen Werth des veränderlichen x richtig sind, stillschweigend vorausgesetzt, dafs, sobald eins

dieser $x = c$ so eben gedacht wird, jedes andere durch diese Proportionen mit ihm in Verbindung gebrachte x ebenfalls *so eben* $= c$ gedacht werden mufs, Und wenn

man eben so $1 : \infty = \infty : \infty\infty : \infty\infty\infty$ u. s. w. behauptet, wo ∞ eine noch immerfort wachsende Gröfse bedeutet: so mufs nothwendig mit behauptet werden, dafs man sich alle in dieser Verbindung vorkommenden ∞ jedesmal in einerlei Stufe des Wachsthums begriffen fordern und vorstellen müsse; welches wir in der Kürze die gleichzeitige Gleichheit dieser ∞ nennen wollen.

Eben daraus folgt, dafs, wenn man irgend eines von diesen ∞ sich $= \infty$ geworden denken oder fordern will, eben dieses auch für jedes der übrigen ∞ geschehen müsse, und demnach aus den gleichzeitig gleichen ∞ in der obigen Progression auch allemal $1 : \infty = \infty : \infty\infty = \infty\infty : \infty\infty\infty$ u. s. w. folgen mufs.

§. 13. Eben so mufs auch in $1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty\infty}$ u. s. w. schlechterdings die gleichzeitige Gleichheit aller $\frac{1}{\infty}$ nothwendig vorausgesetzt werden; daher sie dann auch nur gleichzeitig, zu den ∞ in der Progression $1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty\infty}$ u. s. w. geworden seyn können und müssen.

Vorerinnerung VIII.

Das relative Verschwinden, und statt dessen das absolute Verschwinden als einzig nöthiger Grundsatz zur Rechtfertigung der Differential-Methode.

§. 1. P und Q mögen einzeln oder beide, constante oder veränderliche Gröfsen seyn: so

mufs $P.\alpha^m : Q\alpha^n = 1 : \frac{Q}{P} : \frac{Q}{P} \cdot \frac{1}{\alpha^{m-n}}$

also auch $P.\alpha^m : P\alpha^m + Q\alpha^n = 1 : 1 + \frac{Q}{P} \cdot \frac{1}{\alpha^{m-n}}$

seyn.

Sey nun $m > n$, so ist $\frac{1}{\alpha^{m-n}}$ ein Unendlichkleines; und wenn es dann gewifs ist, dafs eben deshalb auch $\frac{Q.\ 1}{P.\alpha^{m-n}}$ allemal ein Unendlich kleines bleiben mufs (wie es z. B. keinem Zweifel unterworfen seyn kann, wenn P und Q eine endliche Gröfse, auch nicht $P = o$ seyn soll): so ist es aus dem letzten Ausdrucke des Verhältnisses sehr einleuchtend, dafs sich dasselbe ohn Ende dem Verhältnisse der Gleichheit, wie $\frac{Q.\ 1}{P.\alpha^{m-n}}$ der o nähert; und

demnach $P.\alpha^m : P.\alpha^m + Q.\alpha^n$, eben so dem Verhältnisse der Gleichheit sich nähern mufs.

§. 2. So mufs

z. B. $P\alpha^3 : P\alpha^3 + Q\alpha^2 = 1 : 1 + \frac{Q}{P.\alpha}$ seyn,

und eben so $P\alpha^2 : P\alpha^2 + Q\alpha^1 = 1 : 1 + \frac{Q.}{P.\alpha}$

eben so $P\alpha : P\alpha + Q = 1 : 1 + \frac{Q}{P.\alpha}$

auch eben so $P : P + \frac{Q}{\alpha} = 1 : 1 + \frac{Q}{P.\alpha}$

auch $\frac{P}{\alpha} + \frac{Q}{\alpha\alpha} = 1 : 1 + \frac{Q}{P.\alpha}$ seyn; indem ja in allen diesen Beispielen, α^{m-n} einerlei, $= \alpha^{x}$ ist.

Da nun $\frac{Q}{P.\alpha}$ immerfort dem $= o$ sich nähernd ist, und man daher auch allemal noch etwas zu grofses dafür angeben würde, wenn man eine noch so kleine Gröfse, die aber noch nicht völlig $= o$ wäre, dafür angeben wollte: so mufs eben so auch $\frac{Q}{\alpha\alpha}$ neben $\frac{P}{\alpha}$, auch $\frac{Q}{\alpha}$ neben P; auch Q neben $P.\alpha$, auch $Q\alpha^{1}$ neben $P\alpha^{2}$, auch $Q\alpha^{2}$ neben $P\alpha^{3}$, u.s.w. in Hinsicht auf die Gröfse dieser Verhältnisse, verschwindend seyn.

§. 3. Auf dieses verhältnifsmäfsige Verschwinden pflegt man den Hauptsatz der Differentialrechnung zu gründen, dafs nämlich, X eine Function des x bedeutend, und ihr Differential

$$dX = p\,dx + Q\,dx\,dx + R\,dx\,dx\,dx + \ldots$$

als ein $= p.\frac{1}{\alpha} + Q.\frac{1.1}{\alpha\alpha} + R.\frac{1.1.1}{\alpha\alpha\alpha} + \ldots$ gefunden,*)

auch ein $= p.\frac{1}{\alpha} + Q.\frac{1.1}{\alpha\alpha} + o$

auch ein $= p\frac{1}{\alpha} + o \quad + o$

das ist, $dX = p\,dx + o \quad + o$ seyn müsse.

---

*) In der Differentialrechnung III. §. 25, 26, wird es erörtert werden, dafs das hiebei gebräuchliche x-Differential, dx, ein $= \frac{x^{o}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ ist, also eigentlich $dx = \frac{x^{o}}{\alpha\alpha}$ zu schreiben wäre; ja nicht etwa $= \frac{x}{\alpha} = !$

§. 3. Gegen diese Begründung des unentbehrlichen Satzes, dafs $dX = pdx + o$ für den Erfolg vollkommen richtig sey, mufs ich folgende Bedenklichkeiten aufstellen.

1) Wenn der Beweis für das verhältnifsmäfsige Verschwinden in §. 1. einleuchtend überzeugen sollte, so mufste ausbedungen werden, dafs P zwar jede endliche constante oder variable Gröfse, aber kein $P = o$ solle seyn können. Da nun aber in dem aufgefundenen Functionsdifferential $dX = p\,dx + Q\,dx^2 + R\,dx^3 + \ldots$ sogleich für p eine solche Function des x sich ergeben kann, welche für einen oder mehre Werthe des x ein $p = o$ ausmacht: so mufs es doch bedenklich fallen zu behaupten, dafs auch bei diesen Werthen des x ebenfalls $Q\,dx^2$ gegen $p\,dx = o.\,dx$ also $Q\,dx$ gegen $p = o$, verschwindend seyn soll! Allerdings kann und mufs das behauptet werden, würde aber einer ziemlich umständlichen Erörterung bedürfen.

2) Wenn Q für einige Werthe des x als ein Vollgrofs ∞, oder sogar als ein ∞^n sich ergibt, z. B. für $x = b$, wenn $Q = \frac{2}{(x-b)^3}$ wäre, wobei $p = \frac{-1}{(x-b)^2}$ seyn würde; wie kann und soll man dennoch überzeugt bleiben, dafs $Q\,dx\,dx$ gegen $p\,dx$,

also $\frac{2.\,dx\,dx}{0.0.0} = 2.\infty\infty\infty.\frac{x^\circ.\,x^\circ}{\infty\infty} = 2\infty$,

gegen $\frac{-1.\,dx}{0.0} = -1.\infty\infty.\frac{x^\circ}{\infty} = -1.\infty$,

also $+2$ gegen -1 verschwindend seyn mufs?!

Diese einzige Betrachtung allein schon dürfte hinreichend gewesen seyn, auf die Unbrauchbarkeit des verhältnifsmäfsigen Verschwindens als Beweisgrund für die Differentialmethode aufmerksam zu machen: wenn nicht hier die weitere Nachforschung durch die

bekannte Lehre verhindert wäre, dafs für solche Fälle, wo sich P oder Q u.s.w. als ein $=\infty$ ergäbe, das so genannte vollständige Differential $p\,dx + Q.dx^2 + R\,dx^3 \ldots$ nicht mehr das richtige Differential bleibe! Ein allgemein verbreiteter Irrthum, dessen wir bald genauer erwähnen werden.

§. 4. Indem wir statt jenes verhältnismäfsigen Verschwindens lieber folgenden Grundsatz unmittelbar benutzen:

G mag seyn, was es will, eine constante oder veränderliche, bejahte oder verneinte, unendlich grofse oder unendlich kleine, mögliche oder unmögliche Gröfse, allemal fehlt man um U, wenn man $G + U = G$ behauptet; fehlt also um ein Unendlichkleines, wenn U unendlich klein ist, fehlt um Nichts, wenn $U = o$ ist, fehlt um ein Endlich- oder sogar um ein Unendlich-Grofses, wenn U endlich oder unendlich grofs ist.

Indem wir diesen einleuchtenden Grundsatz vor Augen behalten, so werden wir nicht nur mit allen bisher bekannt gewordenen Benutzungen des Infinitesimal-Calculs leichter und deutlicher zum Ziele gelangen; sondern es wird uns auf diesem unsern Wege auch einleuchtend werden, dafs selbst auch einige der scharfsinnigsten Mathematiker durch jenen ihren mühseligen Weg auf einige falsche Behauptungen gerathen sind, und dagegen neue Fragen und Aufgaben für den Differentialcalcul uns entstehen, die ihnen nicht nur unauflösbar, sondern sogar völlig unstatthaft erscheinen mufsten.

§. 5. Der eben aufgeführte Grundsatz ist dem gemeinen Menschenverstande so einleuchtend, dafs nur diejenigen, welche durch lange Benutzung jenes verhältnismäfsigen Verschwindens an die damit ver-

bundenen künstlichen und schlüpfrigen Umwege gewöhnt sind, eben dadurch auch mit Behauptungen und Meinungen sich befreundet haben, durch welche selbst auch einige sehr nahe und deutliche Anwendungen jenes Grundsatzes ihnen verdächtig gemacht werden können. Folgende Beispiele dieser Art können der Ueberschrift dieser Vorerinnerung gemäfs hier hinzugefügt werden.

§. 6. Wenn man $a + \frac{a}{\infty} = a$ behauptet, so begeht man einen unendlich kleinen Fehler, weil $\frac{a}{\infty}$ eine unendlich kleine Gröfse ist.

Wenn man $a + \frac{a}{\infty} = a$ behauptet, so fehlt man um gar nichts, weil $\frac{a}{\infty}$ völlig $= 0$ geworden seyn mufs. (Vorerin. VII. §. 5.)

§. 7. Wer aber $a\infty + a = a.\infty$
oder $a\infty + a = a.\infty$ behauptet, der begeht einen sehr angeblichen Fehler $= a$; und solche Fehler soll man sich nicht erlauben.

Hierauf wird mir nun namentlich von denen in §. 5. erwähnten Lehrern dreierlei entgegnet werden:

I) Da schon $a.\infty$ eine Gröfse seyn soll, die ohn Ende wächst, so mufs sie als solche auch den ihr gleichartigen Wachsthum $1.a$ schon mit in sich fassend seyn!

Ich erwiedere, dafs man gegen die in Vorerin. VII. als nothwendig dargelegte gleichzeitige Gleichheit dieser beiden ∞ und ∞ verstöfst, wenn man die Gleichung $a\infty + a = a\infty$ behauptet, also behauptet, dafs das zweite ∞ schon $= \infty + 1$ sey, indem das erste nur $= \infty$ ist!

II) Da ich $a + \frac{a}{\infty} = a$ als vollkommen richtig anerkannt habe, so mufs ja, wird man sagen, beide Seiten der Gleichung durch ∞ multiplicirt, auch $a\infty + a = a\infty$ als richtig zugegeben werden!

Ich erwiedere; schon $a + \frac{a}{\infty} = a$ ist richtig mit einem unendlich kleinen Fehler;

folglich $\infty . \left(a + \frac{a}{\infty}\right) = \infty . a$,

das ist $\infty . a + a = \infty . a$, richtig, mit einem unendlich kleinen Fehler unendliche Mal genommen; welches den endlichen Fehler a gibt! Und eben daraus erhellet, dafs allerdings hier ein Fall eintritt, wo auch ∞ mit $\frac{a}{\infty} = o$ multiplicirt $= a$ geben mufs. (Die sämmtlichen Fälle, welche eine Ausnahme von der ihnen vorangehenden Regel ausmachen, dafs auch $\infty . o = o$ geben mufs, werden nachher in Vorerin. IX. dargestellt werden.)

III) Da $a + \frac{a}{\infty} : a = 1 + \frac{1}{\infty} : 1$ seyn mufs, und das Verhältnifs $1 + \frac{1}{\infty} : 1$ dem Verhältnisse $1 : 1$ immerfort sich nähernd ist: so mufs auch $a + \frac{a}{\infty} : a$ dem Verhältnisse $1 : 1$ ohn Ende sich nähern; kann also zwischen beiden Verhältnissen irgend eine angebliche Verschiedenheit nicht statt finden!

Ich erwiedere, dafs man angebliche Gröfsen, auch durch und für sich selbst angegeben verlangen kann, nicht allemal nur nach ihrem Verhältnisse zu andern Gröfsen zu fragen, und nur selten nach ihrem Verhältnisse zu unendlichen Gröfsen zu fragen braucht, auch die Antwort auf solche letztere Frage keine andere seyn kann, als dafs dieses Verhältnifs sich ohne-

Ende einem solchen nähert, welches gar nicht mehr kann angegeben werden.

§. 8. Die Trigonometrie, in welcher man geometrische Längen auch calculatorisch auszudrücken sehr gewöhnt ist, mufs eben dadurch vorzüglich bequem seyn, hieher gehörige Begriffe anschaulich darzulegen.

So lange φ ein Winkel ist, der sich dem rechten noch immerfort nähert, so lange mufs $r.\tang\varphi = \propto.r$ eine noch immerfort gröfser und gröfser werdende Linie seyn. Wenn aber $\varphi = 90$ Grad geworden ist, so ist auch $r.\tang\varphi = \infty.r$ eine vollgrofse Linie geworden.

Diese $r.\tang 90°$ sey $= AO$, Fig. 11. (wo man freilich den Endpunct O über alle Gränze hinaus entfernt denken mufs) und eine endliche Linie BA sey $= a$, so ist $BA + AO = a + r.\infty$.

Wo man nun blofs nach dem sogenannten geometrischen Verhältnisse BO:AO zu fragen hat, da mufs die Antwort seyn, dafs dieses Verhältnis $a + r.\infty : r.\infty$ auch $= \frac{a}{\infty} + r : r$ auch $= o + r : r = 1 : 1$ ist, also $a = BA$ hiebei so gut als Nichts, als ein völliges Nichts wirkend sey; indem es hiebei nur als $\frac{a}{\infty} = o$ geworden, wirkend ist.

Wenn man aber hieraus folgern wollte, dafs überhaupt die BA neben der AO gar nicht brauche angegeben zu werden: so würde man dadurch Verzicht leisten, den Unterschied BO — AO angeblich zu finden, auch wenn dieser Unterschied eine sehr beträchtliche angebliche Gröfse $BA = a$ ist, auch namentmentlich als trigonometrische Tangente einen Winkel BCA von einer sehr beträchtlichen und sogar dem rechten Winkel ACO nahe kommenden Gröfsen zugehören kann!

§. 9. Durch dieses Beispiel wird man gegen manche gewöhnliche Begründung der Infinitesimalrechnung zu bedenken veranlafst, dafs nicht alle Bedürfnisse der Mathematik lediglich dem multiplicatorischen und divisorischem (dem so genannten geometrischen) Verhältnisse, sondern viele derselben auch dem additiven und subtractiven (dem so genannten arithmetischen) Verhältnisse unterworfen sind. Da es nun einleuchtend ist, dafs jede Gröfse, welche an sich selbst, in Hinsicht ihrer eigenen Einheit unendlichklein werdend oder wirklich Nichts geworden ist, nicht nur im geometrischen, sondern auch im arithmetischen Verhältnisse eine unendlich klein werdende und Nichts gewordene Wirkung haben mufs: so können wir im Voraus versichert seyn, vermittelst des in §. 4. aufgestellten Grundsatzes sicherer und kürzer, als vermittelst eines nur geometrisch-verhältnismäfsigen Verschwindens zu schliefsen; und durch unsere Darstellung wird es übrigens schon vor Augen liegen, dafs das in der Ueberschrift genannte relative Verschwinden, durch welches viele Lehrer das Verfahren der Differentialrechnung zu rechtfertigen suchen, lediglich in demjenigen bestehe, welches durch das geometrische Verhältnifs zweier Gröfsen gerechtfertigt wird.

Vorerinnerung IX.

Die Producte aus unendlich grofsen und unendlich kleinen Gröfsen betreffend.

§. 1. Die bekannte Behauptung, dafs $7.0 = 0$, auch $9.0 = 0 = 0.9$, und überhaupt, dafs $a.0 = 0.a = 0$

seyn mufs, dürfte uns, so lange wir sie aus dem Begriffe der Multiplication unmittelbar beurtheilen wollen, lediglich bedeutén können, dafs für ein Product als solches, gar nichts bestimmt wird, wenn irgend ein Factor desselben $=0$ ist.

Wenn wir uns aber statt der o zuvörderst $\frac{1}{\infty}$, als eine immerfort kleiner werdende Gröfse gesetzt denken, so werden wir durch die Begriffe der Multiplication sehr deutlich überzeugt, dafs das Product $a.\frac{1}{\infty}$ dem $\frac{1}{\infty}$ proportional, immerfort kleiner und kleiner werdend seyn mufs, folglich dem Gesetze der Stetigkeit gemäfs auch $=0$ geworden seyn mufs, wenn $\frac{1}{\infty}$ stetig $=0$ geworden ist.

Indessen würde es für die vorliegende Absicht auch genügen, nur schlechthin zu bemerken, dafs die Behauptung $a.0=0.\ a=0$, dem gesunden Menschenverstande einleuchtend sey, die Gröfse a mag so grofs oder so klein gegeben seyn, als sie will.

§. 2. Folglich eben so einleuchtend immerfort auch $\infty.0=0$, wenn ∞ eine immerfort wachsende Gröfse bedeutet. Eben deshalb also, wo durch dieses Wachsen ein Vollgrofs ∞ erreicht wäre, auch $\infty.0=0.\infty=0$.

Und hiebei, dafs auch die Gröfse dieses Productes $=0$ sey, würde es durchaus bleiben müssen, wenn wir einerseits über die o, und andrerseits über die ∞ oder ∞, niemals ein weiteres zu sagen wüfsten, als dafs jene o ein völliges Nichts, und dieses ∞ eine immerfort noch wachsende Gröfse, und ∞ ein erreichtes Vollgrofs sey.

§. 3. Wenn aber I) das o-werden und o-geworden seyn des einen Factors, und das ∞-werden und

∞-geworden seyn des andern Factors, von einander abhängig sind: so würde das Abnehmen des einen, und das Wachsen des andern Factors sich

1) dergestalt gegen einander verhaltend seyn können, dafs das Product immerfort sogar einerlei Gröfse behalten müfste.

Sey zum Beispiel a irgend eine gegebne gerade Linie, und indem x und y veränderliche Zahlen bedeuten, sey $= x.a$ die veränderliche Grundlinie, und $= y.a$ die veränderliche Höhe eines Rechteckes, die sämmtliche Veränderlichkeit aber dem Gesetze unterworfen; dafs allemal $y = \frac{1}{x}$ sey: so werden, indem man y von $= o$ bis auf $= \infty$ anwachsen läfst, die dazu gehörigen Rechtecke zwar immerfort anders und anders gestaltet, jedes derselben aber wird als $= x.a.y.a$, auch allemal $x\,a\frac{a}{x} = a\,a$ seyn.

Häufiger wird 2) der Fall vorkommen, dafs zwar das Product aus zwei von einander abhängigen veränderlichen Gröfsen nicht immerfort einerlei bleibend, aber doch immerfort endlich sich ergeben mufs, auch wenn der eine Factor $= o$, der andere $= \infty$ geworden ist.

Dergleichen ist, indem r den lineären Halbmesser eines Kreises bedeutet, das Rechteck $\cos\varphi . \operatorname{Tang}\varphi = r.\cos\varphi . r \operatorname{tang}\varphi$; welches bei $\varphi = o$ ein $= r.o = o$, und von da an mit dem Winkel φ immerfort wachsend, bei $\varphi = 90°$, ein $= o.\infty$ dergestalt geworden ist, dafs auch dieses $o.\infty$ arithmetisch als ein Product, geometrisch als eine Fläche betrachtet, nur dem endlichen Quadrate $r.r$ gleich seyn kann. Denn ein allgemeines Gesetz für die Veränderlichkeit dieser beiden Factoren ist z. B. dafs $\operatorname{Tang}\varphi = \frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} . r$ ist. Da man nun ver-

möge dieses Gesetzes auch Cos φ. Tang $\varphi = r$. Sin φ hat, so ist es vermöge des Ausdruckes r. Sin φ. sehr einleuchtend, dafs, während φ von o bis 90 Grad, also Sin φ von o bis $= r$ wachsend ist, die Rechtecke von $= o$ an bis zum $= r.r$ hin immerfort wachsend seyn müssen.

§. 4. In dem Beispiele für den Fall I) 1, ist es offenbar, dafs das Abnehmen des einen Factors allemal durch das Zunehmen des andern Factors für den Erfolg des Productes auf das völligste gerade ersetzt wird, und eben dadurch die sämmtlichen Producte auch noch für die äufsersten Werthe der beiden Factoren, $= o$ und $= \infty$, einerlei endliche Gröfse behalten.

§. 5. In dem Falle I) 2, ist dergleichen völlige Ersetzung nicht vorhanden. Aber in dem dafür aufgeführten Beispiele mufs bei dem vollendet $= o$ gewordenen seyn des einen Factors, und dem vollgrofs gewordenen seyn des andern Factors, jene Verkleinerung zu dieser Vergröfserung sich wie ein Endliches zu einem Unendlichgrofsen, also auch wie ein Unendlichkleines zu einem Endlichen verhalten. Je nachdem Cos φ noch um eine endliche oder nur noch unendlichkleine Länge vom Cos $90° = r.o = o$ verschieden ist, je nachdem wird Tang φ noch um eine unendlichgrofse, oder nur noch um eine endliche Länge von Tang $90° = r.\infty$ verschieden seyn; daher denn die Abnahme des eines Factors und die Zunahme des andern Factors immerfort in so weit sich ersetzend seyn müssen, dafs selbst auch ihr $o.\infty$, dieses Product aus ihren äufsersten Gränzwerthen, eine endliche Gröfse seyn mufs.

§. 6. So lange wir von zwei veränderlichen Factoren X und Y ungewifs sind, ob dergleichen gegen-

seitige Abhängigkeit zwischen ihnen vorhanden sey; so lange müssen wir nicht nur über jedes ihrer Producte XY, in Hinsicht seiner Gröfse ungewifs bleiben, sondern namentlich auch für jedes Product ihrer Gränzwerthe, welches ein o. ∞ geworden seyn soll, es unentschieden lassen, ob es eine endliche (vielleicht auch unendlich grofse oder kleine) Gröfse ausmache, oder ein völliges Nichts $= o$ sey.

§. 7. Wo wir II. solche veränderliche Factoren X und Y haben, von denen der eine für sich vollkommen $= o$ werdend und geworden seyn soll; der andere aber von jener Verkleinerung unabhängig für sich veränderlich ist; auch wenn er als ein noch immerfort gröfser werdendes $Y = \infty$ gedacht wird, oder ein vollgrofs gewordenes $Y = \infty$ seyn soll: so ist es gewifs, dafs wir hier nicht nur ein $o.\infty = o$, sondern auch ein $o.\infty = o$ haben müssen.

Denn die Behauptung dieses $o.\infty = o$ ist uns einleuchtend, sobald wir bedenken, dafs $Y = \infty$ in jedem Zeitpuncte seines Gröfserwerdens einzeln genommen, eine angebliche endliche Gröfse A ausmacht, und jedes $o.A = o$ seyn mufs.

Aus diesem $o.\infty = o$ aber mufs dessen $o.\infty = o$, vermöge des methodischen Gesetzes der Stetigkeit sich ergeben.

§. 8. Wenn man dagegen III. zwei solche veränderliche Factoren X und Y zu haben fordert, von denen der eine nur ein unendlich kleiner werdendes $= \frac{1}{\infty}$, niemals eine völlig sich vernullendes $= \frac{1}{\infty}$ seyn, der andere nur ein immerfort gröfser werdendes ∞ seyn soll: so kann das Product aus beiden niemals ein völliges $= o$ geworden seyn, mufs also das Product aus beiden um so mehr nicht $= o$ geworden, sondern eine endliche Gröfse bleibend seyn, wenn

der zweite Factor ein vollgrofses ∞ geworden seyn, der erste Factor aber, wie vorhin, nur ein $\frac{1}{\infty}$, nicht ein $\frac{1}{\infty} = 0$ geworden seyn soll.

Indem man dann ferner bei diesem $XY = \frac{1}{\infty}.\infty$ auch den Factor $\frac{1}{\infty}$ vermöge des Gesetzes der Stetigkeit dem $= \frac{1}{\infty} = 0$ unendlich nahe kommend behaupten kann: so mufs man freilich zugestehen, dafs man dadurch dem Producte $0.\infty$ unendlich nahe kommend seyn mufs, von welchem es hier gewifs ist, dafs es ein $0.\infty = 0$ seyn mufs, weil der eine Factor X für sich abnehmend, der andere Factor Y für sich wachsend gefordert wurde, also nicht zwischen diesem Wachsthume und jener Abnahme ein solches Ersetzungsgesetz vorhanden seyn kann, durch welches das Product $0.\infty$ auf endliche Werthe gebracht würde.

§. 9. Offenbar aber wird man, dafs $XY = 0$ seyn mufs, in dem IIten Falle (§. 6) kürzer und schärfer als in dem IIIten Falle (§. 7.) sich überzeugt finden; daher wir für unsere Differentialrechnung jenen lieber als diesen benutzen werden.

Die hauptsächliche Benutzung, welche ich hier in Gedanken habe, ist folgende. Sey p irgend eine Function des x, und dx, das sogenannte Differential des x, eine eigenmächtige sehr kleine Belegung des x, von welcher man entweder, und nach den meisten Lehrern, erstens nur fordert, dafs sie ohn Ende immerfort kleiner und kleiner werdend gedacht werden soll, oder zweitens es geradezu fordert, dafs sie am Ziele ihrer Benutzung wirklich $= 0$ gewor-

den seyn soll: so kann man bei der ersten Forderung zuvörderst nur behaupten, dafs das Product $p\,dx = p.\frac{x^0}{\infty}$ ist, also dem $= p.o$ ohn Ende sich nähernd seyn mufs bei jedem Werthe des x.

Die zweite Forderung aber macht es uns sogleich und geradezu gewifs, dafs $p\,dx = \frac{x^0}{\infty} = p.o = o$ geworden seyn mufs bei jedem Werthe des p, und, ich will, in einiger Hinsicht noch deutlicher, hinzusetzen, bei jeder Gröfse des p.

Obgleich nun auch bei der ersten Forderung, $dx = \frac{x^0}{\infty}$, behauptet werden mufs, dafs jede Angabe für die Gröfse des $p\,dx = u$ als unrichtig abgewiesen werden kann, so lange u etwas anderes als $= o$ bedeuten soll: so kommt man doch bei der zweiten Forderung eines $dx = o$ geworden, leichter und kürzer zu dem Satze, dafs $p.dx = o$ geworden seyn mufs bei jeder Gröfse des p.

Bei jeder Gröfse des p! Denn wo eine Verschiedenheit dieser Gröfsen vorhanden ist, wie es bei den meisten $p = \frac{dX}{dx}$ eben deshalb Statt findet, weil sie meistens noch eine wahre Function des veränderlichen x ausmachen, da sind diese Gröfsen mit den veränderlichen x veränderlich, und lediglich deshalb verschieden, weil man dem x verschiedene einzele Werthe beilegen kann. Von dem $dx = o$ geworden aber müssen diese verschiedenen Gröfsen unabhängig seyn, weil ja dieses dx bei allen beliebigen Werthen des x ein $dx = o$ geworden seyn soll.

§. 10. Lediglich wegen der langen Angewöhnung an die Meinung, dafs $pdx = p.o$ geworden, dennoch bei solchen Werthen des x, bei welchen $p = \infty$ sich

ergibt, vielleicht ein solches $pdx = \infty.o$, eine endliche Gröfse ausmachen möchte, will ich noch folgende Widerlegung dieser Besorgnifs hinzufügen.

Sey $p = \frac{1}{x-a}$, so ist $x = a$ ein solcher Werth des x, bei welchem $p = \frac{1}{x-a} = \frac{1}{0} = \infty$ sich ergeben mufs, und nun die Besorgnifs einzutreten pflegt, dafs in diesem Falle $pdx = \infty.o$ etwas anderes als $= o$ möchte seyn können!

Aber, man denke sich x nicht plötzlich, sondern allmählig $= o$ werdend, so mufs doch in jedem einzelen Zeitpuncte dieser Annäherung noch $x - a = +e$, oder $x - a = -e$, also p eine endliche bejahte oder verneinte endliche Gröfse $\frac{1}{e}$, folglich immerfort $p.dx = \frac{1}{0}.o = o$ seyn, auch während der Annäherung an $x = a$. Nun braucht man nur diese Annäherung stetig zu fordern, welches, auch wenn a, und daher auch x, eine discrete Zahlgröfse ist, mit einem unendlich kleinen Fehler geschehen kann (Differenz. Rechn. §. 26.): so ist es erwiesen, dafs auch dieses $pdx = \frac{1}{\infty}.o = u$ gesetzt, allemal unrichtig seyn mufs, wenn man nicht $u = o$ angegeben hat.

§. 11. Diese Vorerinnerung will ich mit folgender Bemerkung schliefsen.

In den Rechtecken $\cos\varphi . \operatorname{Tang}\varphi$ kann sowohl die Linie $\cos\varphi = 1.\cos\varphi$, von $\cos\varphi = r.\cos o = r$ an bis zur $\cos 90° = o$ stetig abnehmend, als auch die Tangentenlinie $\operatorname{Tang}\varphi$, von $\operatorname{Tang} o = o$ bis zur $\operatorname{Tang} 90° = \infty$ so stetig wachsend gefordert werden, dafs die Reihe der Rechtecke von $\cos o . \operatorname{Tang} o = 1.o = o$ an bis zum $\cos 90° . \operatorname{Tang} 90° . = o.\infty$ hier eine stetig wachsende Reihe ausmachen mufs.

Gleichwohl ist das erste Glied der Reihe, r.o eigentlich nur eine Linie = r, von einer Dimension, das letzte Glied ∂.∞ eigentlich wiederum nur eine vollendet grofse Linie, also auch keine Gröfse von zwei Dimensionen!

Aber so sehr wir uns auch durch die Geometrie der Alten mit Recht daran gewöhnt haben, zwischen Flächen und Linien als ungleichartigen, und deshalb mit einander nicht vergleichbaren Gröfsen zu unterscheiden: so müssen wir doch nicht nur zugestehen, dafs die beiden eben erwähnten linearen äufsersten Glieder der obigen Reihe von Rechtecken als Gränzfälle dieser Rechtecke zu betrachten sind, sondern auch eingestehen, dafs in der calculatorischen Geometrie, das letzte Glied o.∞ = Cos 90°. Tang 90° allerdings = r. r zu achten ist. (§. 3.)

Vorerinnerung X.

Einige Formeln der algebraischen Trigonometrie.

§. 1. Die gewöhnlichen Formeln der analytischen Trigonometrie, nach welchen

I) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$
II) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$
III) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$
IV) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$

behauptet wird, sind der algebraischen Rechnung mit nothwendig bejahter Einheit, gemäfs verstanden und gebraucht, ganz allgemein richtig.

(Da aus diesen IV. Formeln nicht nur folgende

V. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin\alpha^2}$
VI. $\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 = 2\cos\alpha^2 - 1 = 1 - 2\sin\alpha^2$
VII. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
VIII. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

und mit gehöriger Vorsicht und Ausdeutung auch

IX. $\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}$
X. $\operatorname{tang}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}{1 + \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}$
XI. $\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}\alpha^2}$
XII. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin a}{1+\cos\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

und mehre andere eben so zeichenrichtig herleiten lassen; sondern wir auch im IXten Capitel der Differentialrechnung die sämmtlichen Differentiale

der Kreisfunctionen, aus diesen IV ersten Formeln abgeleitet, und ihrem ∓ unterworfen finden: so wird es der Mühe werth seyn, von der eben versicherten allgemeinen Zeichenrichtigkeit dieser Formeln durch einen solchen Beweis zu überzeugen, dessen ganz allgemeine Anwendbarkeit, vermöge der schon oft und lange von mir dargestellten Richtungstheorie, uns einleuchtend seyn muſs, der einzele Fall auf welchen man ihn graphisch angelegt hat, mag seyn, welcher er wolle.)

Beweis für I. (Fig. 4.)

§. 2. Sey der Winkel CACB $= \alpha$, der Winkel CBCD $= \beta$, also der Winkel CACD $= \alpha + \beta$, oder sey (für den Differential-Calcul anstelliger gesprochen) α der Bogen AB und β der Bogen BD, folglich D mag liegen wo es will, der Bogen AB + BD = AD

$$\text{so ist } KD = CD \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{r}$$

wenn r und sin $(\alpha + \beta)$ die Zahlen bedeuten, welche das Verhältniſs des Halbmessers zum Sinus des Winkels (oder Bogens) $\alpha + \beta$ angeben sollen.

In der Lage KD, möchte nun F seyn, welcher Punct es wolle, so wäre allemal KF + FD = KD, also auch $KF + FD = CD \frac{\sin(\alpha+\beta)}{r}$,

Es werde aber F gerade dadurch bestimmt, daſs man in der CB die $CE = CD \cdot \frac{\cos\beta}{r}$ gezeichnet, und aus E auf die Lage KD normal die EF zieht; auch sey EH normal auf die Lage AC, wodurch HE der

$GB = CB. \frac{\sin \alpha}{r}$ parallel wird: so sind die Dreilich 1) $CB : CE = GB : HE$

das ist $CB : CD. \frac{\cos\beta}{r} = CB. \frac{\sin \alpha}{r} : KF$

Daher $CD. \frac{\sin(\alpha+\beta)}{r} = KF$

$$= \frac{CD. \cos\beta. CB \sin \alpha}{CB. r. r}$$

Also auch $CD. \frac{\sin(\alpha+\beta)}{r} = CD. \frac{\cos\beta}{r} . \frac{\sin \alpha}{r}$

auch $\sin \frac{(\alpha+\beta)}{r} = \frac{\sin \alpha \cos\beta.}{r. r}$

und $1. \sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha. \cos\beta$

den Halbmesser oder Sinus totus $= 1$ voraussetzen, Zahlen, deren Einheit der Sinus totus ist.

(Die 1 in der letzten Gleichung darf nicht fehnommen wird. Für jeden Halbmesser R hat man culatorisch richtig allerdings; geometrisch anist $R. R. \sin(\alpha+\beta) = R. \sin \alpha. R. \cos\beta + R. \cos \alpha. R. \sin\beta$).

§. 3.

Es ist $CD. \frac{\cos(\alpha+\beta)}{r} = CK = CH + HK$

Da nun 1) $CB : CE = CG : CH$

das ist $CB : CD. \frac{\cos\beta}{r} = CB. \frac{\cos \alpha}{r} : CH$

so muſs $CD. \frac{\cos(\alpha+\beta)}{r} = \frac{CD. \cos\beta. CB \cos \alpha}{CB. r. r}$

also auch $CD. \frac{\cos(\alpha+\beta)}{r} = CD. \frac{\cos \alpha. \cos\beta}{r. r}$

allgemein $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{r} = \frac{\cos \alpha. \cos\beta}{r. r}$

und $1. \cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha. \cos\beta$

ecke CGB, CHE und DFE einander ähnlich, folg-

und 2) CB : CG = DE : DF = ED : FD

das ist CB : CB. $\frac{\cos\alpha}{r}$ = — CD. $\frac{\sin\beta}{r}$: DF = CD. $\frac{\sin\beta}{r}$: FD

+ FD

+ $\frac{CB.\cos\alpha.\ CD.\sin\beta.}{CB.\ r.\ r}$.

+ CD, $\frac{\cos\alpha}{r}$. $\frac{\sin\beta}{r}$, noch in Linien;

+ $\frac{\cos\alpha.\ \sin\beta}{r.\ r}$ in reinen Zahlen

+ cos a. sin β, in den Zahlen der Tafeln, welche wie man zu sagen pflegt; richtiger, für diejenigen

len, sobald die Dimensionen-Richtigkeit in Frage ge-

R. sin $(\alpha+\beta)$ = R. sin α. cos β + R. cos α. sin β, cal-

schaulich aber

Beweis für II.

= CH + EF

und 2) BC : BG = ED : EF

also auch CB : GB = ED : EF

das ist CB : CB. $\frac{\sin a}{r}$ = CD. $\frac{\sin\beta}{r}$: EF ist:

+ $\frac{CB.\sin\alpha.\ CD.\sin\beta}{CB.\ r.\ r}$ seyn;

+ CD. $\frac{\sin\alpha.\ \sin\beta}{r.\ r}$,

+ $\frac{\sin\alpha.\ \sin\beta}{r.\ r}$ in Zahlen

+ sin α. sin β für die Zahlen der Tafeln; aber unter

der Bedingung, wie es aus den hier gebrauchten zeichenrichtigen Proportionen erhellet, dafs das zweite Glied, folglich sein Factor CD. $\frac{\sin\beta}{r}$ = ED seiner Seitenrichtung (der Cosinusrichtung) gemäfs geschätzt werde. Da nun dieser Seitenrichtung allemal das Gegenzeichen von demjenigen zukommt, welches man für CD. $\frac{\sin\beta}{r}$ hier erhält, wenn man nach gewöhnlichem, der Algebra sehr gemäfsem Verfahren, den Halbmesser CD allemal als bejaht betrachtet, und $\sin\beta$ für alle hohle Winkel bejaht, für alle convexe verneint ansetzt: so hat man für dieses Verfahren, (welches sich auch unten, aus der Quadranten-Ordnung in §. 5. rechtfertigen läfst) allerdings ganz richtig

$$\text{CD. } \cos\frac{\alpha+\beta}{r} = \text{CD. } \frac{\cos\alpha.\cos\beta}{r.r} - \text{CD. } \frac{\sin\alpha.\sin\beta}{r.r}$$

und daher auch $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$.

Beweis für III. und IV.

§. 4. Läfst sich eben so aus den genau beachteten Höhen- und Seitenrichtungen (Sinus- und Cosinusrichtungen) überzeugend darstellen. Und dafs hie mit die Formeln für alle noch so grofse oder kleine Winkel oder Bogen, α und β, durchaus erwiesen sind, ist uns dadurch einleuchtend, dafs dieselben Buchstaben der Figur, welche die Endpuncte der Bogen α und β bedeuten, auch den Beweis für jeden Fall richtig darstellen, sie mögen einzeln oder beide liegen, in welchem Quadranten sie wollen. Ohne eine solche einleuchtende Allgemeinheit des graphischen Beweises ist eine bündige allgemeine Ueberzeugung nicht möglich, wo die Anzahl der verschiedenen Fälle sogar unendlich grofs ist. Durch meine Richtungstheorie wird man gesichert, dafs der Beweis für alle Fälle

gültig bleibt, wenn er auf irgend einen Fall richtig angelegt ist; mag man dazu ergriffen haben, welchen man will!

Bejahte und verneinte Drehung.

§. 5. Deutliche Begriffe davon zu haben, ist schon bei Construction der eben berührten Beweise, besonders aber für die schwierigern allgemeinen Lehren im XXXten Capitel der Differentialrechnung rathsam. Im IVten Stücke meiner Neuen Erörterungen habe ich die Erörterung des trigonometrischen ∓ mit Erörterung der Drehungsgröfse angefangen; welche ich dort nachgelesen wünsche.

Der erste trigonometrische Quadrant CA CB, Fig. 4*, heifst derjenige, dessen sämmtliche Hülfslinien, Sinus, Cosinus, Tangente u.s.w. sowohl in Hinsicht ihrer Höhen- als ihrer Seitenrichtung nur bejaht gerichtet sind. Wenn der Halbmesser CA, um C sich drehend, diesen ersten Quadranten von dessen Anfang A an, bis zu dessen Ende B hin, mit vorgängiger Bewegung beschrieben hat, und diese vorgängige Bewegung fernerhin fortsetzt; so mufs der nächste Quadrant BD der zweite, der dann folgende DE und EA der dritte und vierte heifsen. Diese vorgängige Drehung wird die bejahte genannt.

Dafs nun jede rückgängige Drehung eine verneinte heifsen mufs, ist sehr einleuchtend. Dafs aber auch gerade AE der erste, ED der zweite verneinte Quadrant u.s.w. heifsen mufs, ist deshalb gewifs, weil bei Aufzählung der bejahten Quadranten gerade die Höhenrichtung beachtet ist. Es war natürlich, dafs bei dem empirischen Entstehen der analytischen Trigonometrie gerade die Höhenrichtung der Sinus zuvörderst beachtet wurde; und wenn solche einmal

entstandene Gewohnheiten sich rechtfertigen lassen, so müssen sie beibehalten werden.

§. 6. Es muſs sogar die gewöhnliche Lehre beibehalten werden, daſs ein mit vorgängiger, bejahter Drehung beschriebener stumpfer Winkel CACF einerlei bejahten Sinus mit dem spitzen Winkel CDCF hat, der mit rückgängiger Bewegung beschrieben ist; daher ich auch in Differ. Rechn. IX. §. 1. die genetische Definition des Sinus dieser Lehre gemäſs, und ganz allgemein gültig für alle Winkel und Bogen ausgedrückt habe, auch wenn sie den ganzen Umkreis schon ein oder mehre Male mit enthalten.

§. 7. Bei Verbindung vorgängiger und rückgängiger Drehungen muſs man sorgfältig erwägen, wie sie beide einander subtractiv wirken, welches die wenigste Schwierigkeit hat, wenn die rückgängige Drehung in dem Endpuncte der vorgängigen ihren Anfang nimmt, wie es die Formeln III, und IV. in §. 1. auch voraussetzen. Daher ist es leicht, aus diesen Formeln den Sinus und den Cosinus eines Winkels 180° zu folgern. Denn in diesen

Formeln, $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$,
und $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$,
$\alpha = 180°$ gesetzt, haben wir sogleich

$$\sin(180°-\beta) = \sin 180°.\cos\beta - \cos 180°.\sin\beta$$
$$= 0.\cos\beta - (-1.\sin\beta) = \sin\beta$$
$$\cos(180°-\beta) = \cos 180°.\cos\beta + \sin 180°.\sin\beta$$
$$= -1.\cos\beta + 0.\sin\beta = -\cos\beta$$

§. 8. Aus zwei Winkeln β und γ eines Dreieckes, durch $\sin\beta$ und $\sin\gamma$ gegeben, den Sinus seines dritten Winkels $\delta = 180° - \beta - \gamma$ zu finden, hat man, in der IIIten Formel, $\alpha = 180°-\beta$, und ihr $\beta = \gamma$ gesetzt, $\sin[(180°-\beta)]-\gamma = \sin(180°-\beta).\cos\gamma - \cos(180°-\beta).\sin\gamma$ nach §. 7. also $= \sin\beta.\cos\gamma + \cos\beta.\sin\gamma$

Eben so aus der IVten Formel,

$\cos \delta = \cos (180° - \beta) . \cos \gamma + \sin (180° - \beta) . \sin \gamma$

nach §. 7. $= - \cos \beta . \cos \gamma + \sin \beta . \sin \gamma .$

Also $\text{tang } \delta = \dfrac{\sin \beta . \cos \gamma + \cos \beta . \sin \gamma}{\sin \beta . \sin \gamma - \cos \beta . \cos \gamma}$

Vorerinnerung XI.

Einige Curvengleichungen, welche in der Folge als bekannt vorausgesetzt werden.

§. 1. Die Gleichung $yy = bx + nxx$ gibt uns
1) für die Parabel $yy = bx$ (Fig. 5.)
2) für die Ellipse $yy = bx - \frac{b}{a}xx$ (Fig. 6.)
3) für die Hyperbel $yy = bx + \frac{b}{a}xx$

wenn wir 1) die Zahl $n = \frac{b}{a} = \frac{b}{\infty} = 0$

2) die Zahl $n = -\frac{b}{a}$,

3) die Zahl $n = +\frac{b}{a}$, eigentlich $= -\frac{b}{-a}$

annehmen.

§. 2. Nur dann wenn wir der algebraischen Geometrie gemäfs, das $+\frac{b}{a}$ der Hyperbel als $\frac{-b}{-a}xx$ uns denken, ist es für alle Kegelschnitte richtig, dafs die Linie $+a$ dem Parameter $+b$ gleich gerichtet, denjenigen Theil der Abscissenlinie ausmacht, in welchem von seinem Anfange an die bejahten Abscissen $+x$ genommen werden.

§. 3. In der Parabel ist die ganze $+a = +\infty$ die Axe der Parabel, dem bejaht gegebnen Parameter gleich gerichtet, welcher für die Parabel die einzige constante, von allen orthogonalen Coordinaten x und y unabhängige Linie ausmacht.

In der Ellipse ist a die grofse Axe der Ellipse, und der Parameter $b = \frac{cc}{a}$, indem c die kleine Axe der Ellipse bedeutet. Sowohl die grofse, als die kleine

Axe*) der Ellipse wird in ihrem Anfangs- und Endpuncte durch die Ellipse begränzt.

Von der Hyperbel kann nur die eine Axe, $-a$, auch in ihrem Endpuncte begränzt werden. Verlangt man eine, der zweiten Ellipsenaxe $c = \sqrt{ab}$ entsprechende Axe, und meynt dann, dafs ihr der Ausdruck $c = \sqrt{-ab}$ zukomme, so mufs man doch zugestehen, dafs sie eine algebraisch unmögliche Gröfse ist.**)

§. 4. Die grofse Axe a der Ellipse und die ihr gegenstimmig gerichtete Axe $-a$ der Hyperbel, pflegen beide die Zwerchaxe genannt zu werden; vielleicht weil sie beide in Hinsicht des algebraisch geometrischen Kegels (nach der gemeinen Geometrie ein Doppelkegel) überzwerch laufend sind.

Sehr schicklich dürften sie Grundaxen genannt werden; weil allemal in ihnen die Abscissen x zu nehmen sind, auch dann für die andere ihr normale Axe c der Name Seitenaxe sich darbietet.

---

*) Von den französischen Mathematikern wird jede geradlinige Abscisse eine Axe der Curve genannt. Besser werden von den teutschen nur solche Abscissenlinien auch Axen genannt, durch welche, wie durch andere Axen, welche nicht Abscissenlinien sind, die Curve in zwei einander congruente Theile, und zwar dergestalt zerlegt werden, dafs sie einander decken müfsten, wenn die eine Hälfte der Axen-Ebne durch 180 Grad um die Axe gedreht würde.

**) Die wahren Aussprüche der algebraischen Geometrie über die Seitenaxen der Kegelschnitte lagen mir selbst noch sehr im dunkeln, als ich vor 44 Jahren im 2ten Bande meiner Algebraishen Auflösungen diese Curven mit berührte. Von andern gehörig dargestellt, sind sie mir auch nachher nicht vorgekommen. Hier sind sie nicht nothwendig.

§. 5. Allerdings ist es calculatorisch richtig, und wir werden in solcher Hinsicht auch bequemen Gebrauch davon machen, dafs nach Vega, Vorlesungen über die Mathematik, Band 2. Vorles. VI, in der Ellipsengleichung $yy = bx - \frac{b}{a}xx$, auch a die kleine Axe seyn könne, wenn man dafür den Parameter $b = \frac{aa}{c}$ annimmt, daher von ihm $b = \frac{cc}{a}$ der zur Axe a und $b = \frac{aa}{c}$ der zur Axe c gehörige Parameter genannt wird.

Nothwendig aber mufs, bei dieser umgewechselten Bedeutung der a und c, auch der Abscissenanfang aus A nach U hin verlegt gedacht werden; so dafs nun wiederum die grofse Axe einen bejahten Anfangstheil der Abscissenlinie ausmacht, also wiederum die grofse Axe auch die Grundaxe ist, in welcher allein auch allemal die beiden möglichen Brennpuncte vorgefunden werden.

§. 6. Die Abscissen x aus dem Mittelpuncte der Ellipse genommen, hat man $yy = \frac{cc}{4} - \frac{cc}{aa}xx$, nicht nur wenn, wie gewöhnlich, a die grofse und c die kleine Axe bedeutet, sondern auch wenn mit Vega diese Bedeutung verwechselt wird; hiebei aber wiederum vorausgesetzt, dafs nunmehr die Abscissen in der nunmehrigen grofsen Axe c genommen werden.

§. 7. Wenn man a und c nur die halben Axen bedeuten läfst: so hat man $yy = cc - \frac{cc}{aa}xx$. Hierin $a = c$ gesetzt, gibt $yy = cc - xx$ als die Kreisgleichung für den Halbmesser c.

§. 8. Alle bisher erwähnten Ordinaten y waren unter sich parallel, und den Abscissen normal. Der

parallelen schiefen Ordinaten werde ich mich nie bedienen, denn ich habe nie das Bedürfnifs empfunden, die Anwendung der Theorie auf die Praxis ganz unnöthiger Weise mir dadurch zu erschweren. Namentlich sollte man sich für die anschaulichen analytisch geometrischen Constructionen in der höhern Mechanik, unter den parallelen Ordinaten lediglich der orthogonal coordinirten bedienen.

Die gedrehten, polarischen Ordinaten aber sind nicht nur für manche Curven, z. B. für die Spiralen, u. s. w. ungleich bequemer, als die parallelen mit ihrer parallelen progressiven Bewegung; sondern selbst auch bei andern Curven, welche überhaupt genommen durch parallele Ordinaten sehr gut bestimmt werden, ist es gleichwohl für einige ihrer Anwendungen bequemer, ebenfalls der polarischen Ordinaten sich zu bedienen.

§. 9. In der Parabel $yy = bx$ Fig. 6. sey $AF = \frac{b}{4}$, so ist F der Brennpunct, und FM ein radius vector. Der Ort M mag in der Parabel liegen, wo er will, so hat man, $FM = v$ und den Winkel $PFM = \varphi$ genannt,

allemal $y\ (= PM) = v. \sin \varphi$,

und $x\ (= AP) = \frac{b}{4} + v. \cos \varphi$; folglich statt der obigen Parabelgleichung $yy = bx$

auch $v^2. \sin \varphi^2 = \frac{b.b}{4} + b. v \cos \varphi$.

Wenn wir nun die Linie $v. \cos \varphi = u$ setzen, also u Abscissen aus dem Focus F bedeuten lassen: so haben wir $v^2. \sin \varphi^2 = \frac{bb}{4} + bu$, eine Gleichung für die Parabel mit noch geradlinigen Abscissen u, aber polarischen Ordinaten $v = FM$, die nämlich in F ihren Pol haben, um diesen Punct sich drehend gedacht werden.

Gar oft aber ist es rathsam, statt der geradlinigen Abscissen lieber krummlinige, und namentlich Kreisbogen anzunehmen, wie in der gleichfolgenden Spirale.

Erklärung.

§. 10. In der Figur sey $CA = a$, $ACR = \varphi$ ein veränderlicher Winkel und $AR = a \operatorname{arc} \varphi$ die Länge dieses Bogens, auch $p = a\, 2\pi$ die Länge des ganzen Umkreises; und der durch den Winkel φ bereits gedrehte Halbmesser $CR = s$ werde um $RM = \frac{AR.a}{p} = \frac{a \operatorname{arc} \varphi . a}{a.2\pi} = \frac{\operatorname{arc} \varphi}{2\pi} . a$ verlängert, so ist M ein Punct in der Archimedischen Spirale.

Zusatz.

Würde daher $AR = a$, $\operatorname{arc} \varphi = x$ und $RM = y$ genannt, so würde durch die bogenförmigen Abscissen x und die aus C divergirenden Ordinaten y die Spirale AMOBDE bestimmt werden. Es ist aber gewöhnlicher und in mehrer Hinsicht bequemer, den ganzen radius vector $CM = r + y$ als die Ordinate zu betrachten. Wenn wir nun diese polarischen Ordinaten $CM = v$ und die kreisbogenförmigen Abscissen $AR = a.\varphi$ nennen, wo φ den arc φ bedeutet, so ist $v = a + \frac{\varphi}{2\pi} . a$ die Gleichung für die Spirale, indem A als der Anfangspunct der bejahten Abscissen $a\varphi$ betrachtet wird, welche dort mit $\varphi = o$ ihren Anfang nehmen.

Für $\varphi = 90°$, $\varphi = 2.90°$, $\varphi = 3.90°$, $\varphi = 360°$ erhält man
die Puncte O , B , D , E
in der Spirale, welche bei unendlich fortgesetzter Drehung ohne Ende umlaufend seyn wird. Nach der

ersten bejahten Umdrehung ist der Spiralpunct E um $= 2r$, nach der zweiten bejahten Umdrehung um $3r$, u. s. w. von dem Mittelpuncte C entfernt, welches am deutlichsten einleuchtet, wenn man statt des bisherigen φ lieber $n.2\pi+\varphi$ schreibt, also nunmehr unter φ immer nur einen Bogen versteht, der kleiner als der Halbkreis ist; wodurch wir nun für die bejahten Drehungen die Gleichung $v = a + \frac{n.2\pi+\varphi}{2\pi} a$ erhalten.

Natürlich findet auch eine negative Umdrehung statt, durch welche die Spirale C, D', u. s. w. erzeugt wird. Da nun auch diese negativen Umdrehungen ohne Ende fortgehen können: so ist die Spirale, welche durch die Gleichung $v = r \mp \frac{n2\pi+\varphi}{2\pi} r$ definirt wird, eine Curve, deren bejahter und verneinter Theil ohne Ende umlaufend ist.

Was nach dieser unserer Darstellung der Spirale durch die erste verneinte Umdrehung beschrieben wird, mufs man aus dem Mittelpuncte C anfangend schon durch die erste bejahte Umdrehung erhalten, wenn man, wie es bei den Analysten gewöhnlich ist, die Gleichung $v = \frac{\varphi}{2\pi} a$ ansetzt, und diesen innerhalb des Kreises liegenden Theil der Spirale hat Archimedes die erste Spirale genannt. Die zweite, dritte heifst ihm, was dann durch die zweite, dritte Umdrehung u. s. w. beschrieben wird. Dieses kann am Archimedes nicht getadelt werden, wohl aber an einigen Analysten der neuern Zeit, dafs auch sie die durch ihre algebraische Gleichung bestimmte Curve ebenfalls in dem Puncte C begränzt meynen. Vega ist der verneinten Drehung richtig eingedenk gewesen.

Uebrigens schien es mir rathsamer, den Anfangspunct der Abscissen, also den Anfang der bejahten,

folglich auch schlechthin sogenannten Spirale in A anzunehmen; weil bei allen den Spiralen, die wir in der Maschinenlehre zu benutzen haben, ihr Anfang schon eine ziemliche Entfernung vom Pole hat, und gerade diese Entfernung oftmals sehr bequem dem Halbmesser des Abscissenkreises gleich gesetzt wird.

(Noch einige rückständige Vorerinnerungen könnten für den zweiten Band verschoben bleiben.)

Differentialrechnung.

Erstes Capitel.

Begriffe von Functionen. Einige Beispiele der Differenzenlehre; Differenzen- und Differential-Quotient.

§. 1. Wünscht man die Bewegung einer Maschine oder Naturerscheinung der mathematischen Theorie zu unterwerfen: so wird vor allem in Frage zu nehmen seyn, von welchen andern beständigen oder veränderlichen Gröfsen (Vorerinnerung II.) diese Bewegung abhängig sey.

Wäre man gewifs, dafs dergleichen Bewegung u während ihrer Zeitdauer t, lediglich in den drei Gröfsen a, x und y begründet seyn könne: so würde man sie eine Wirkung der a, x und y während der Zeit t nennen; dürfte aber es anstöfsig finden, diese u eine Wirkung aus a, x, y und t zu nennen, obgleich die u auch von dem Zeitverlaufe t abhängig ist.

Will man ferner als gewifs oder doch als möglich andeuten, dafs aufser den angeführten Gründen a, x, y noch andere bewegende Kräfte oder Bewegungshindernisse auf die Bewegung u Einfluss haben könnten, dessen ungeachtet aber diese doch in so fern schon betrachtet werden soll, als man aus den aufgeführten drei Gründen auf sie zu schliefsen vermag: so würde man ebenfalls Bedenken tragen, die u schlecht-

hin die Wirkung dieser drei Gröfsen zu nennen, nur etwa eine respective Wirkung sie nennen wollen.

§. 2. Allerdings ist es nun im Allgemeinen gewöhnlich, eine Gröfse u, die von a, x, y, t abhängig ist, in dieser Hinsicht eine Function von diesen vier Gröfsen zu nennen, auch wenn einige oder alle derselben nicht veränderlich sind.

In der Arithmetik sind Summen und Differenzen von ihren Additiven und Subtractiven abhängig. Jedes Product ist von seinen Factoren, jeder Quotient von seinem Dividend und Divisor, jede Potenz und jede Wurzel von ihrer Stammgröfse abhängig. Will man nun in der Kürze andeuten, dafs eine Gröfse durch irgend eine oder mehre von diesen arithmetischen Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens, Dividirens oder Wurzelziehens aus den Gröfsen A und B müsse dargestellt werden können: so pflegt man allerdings zu sagen, dafs jene Gröfse irgend eine arithmetische Function der A und B sey, auch wenn weder A noch B eine veränderliche Gröfse ist.

§. 3. Wenn man aber vermittelst der Differenzenlehre, oder — den stetig wirkenden Naturkräften meistens angemessener, und einzig angemessen — vermittelst der Differential-Methode, Theorie zu finden oder anzuwenden sucht: so hat man nur solche Aenderungen oder Aenderungsverhältnisse in Frage zu nehmen, welche durch die veränderlichen Functionstheile dergestalt bestimmt werden, dafs man niemals veranlafst ist, eine beständige Gröfse für eine Grundgröfse der Function, das heifst, für einen solchen Theil der Function anzuerkennen, auf welchen die Anlage jenes Calculs zu gründen wäre. Daher ist es dann vermuthlich auch dahin gekommen, dafs man gar häufig le-

diglich die veränderlichen Gröfsen, welche in einer Function vorkommen, zu nennen pflegt, wenn man sie in Hinsicht ihrer Bestandtheile andeuten und von andern unterscheiden will.

Sey zum Beispiel u die freie Fallhöhe eines Körpers m, der von unserm Erdkörper, und zwar, unter den dahin gehörigen Umständen und Bedingungen, von der sämmtlichen Masse M desselben, als ob sie in einem Mittelpuncte C vereinigt wäre, angezogen wird: so mufs diese u nicht nur mit der Zeitdauer t sich ändern; sondern im Allgemeinen auch von den beiderseitigen anziehenden Kräften abhängig seyn. Wollte man nun darauf achten, dafs mit der Entfernung x zwischen m und C, welche während des Fallens sich immerfort ändert, auch jene beiderseitigen Ziehkräfte veränderlich sind: so würde bei dem Anlegen der Differential-Methode gesagt werden, dafs man u als eine Function von t und x und den beiden Ziehkräften zu betrachten habe.

Sey aber m so äusserst klein gegen M, dafs die Ziehkraft, welche m gegen M ausübt, als unbemerkbar zu beseitigen ist; so wird die einzige dann noch übrige Kraft, mit welcher die Masse des Erdkörpers den kleinen Körper m an sich zieht, in Hinsicht des veränderlichen x so gut als völlig einerlei bleibend seyn, wenn

1) die gesammte Fallhöhe u in Vergleich mit x eine so unbeträchtliche Länge ausmacht, dafs selbst auch $(e-u)^2$ vom e^2 nicht beachtungswerth verschieden ist, indem e die gröfste anfängliche Länge des x, also $e-u$ dessen letzte und kleinste Länge bedeutet, und wenn dabei

2) von der anziehenden Kraft des M vorausgesetzt wird, dafs sie als eine absolute Kraft wirke, nämlich der wachsenden Geschwindigkeit des fallenden

Körpers ungeachtet, immerfort gleich stark auf ihn wirke. Diese sich immerfort gleich bleibende Wirkung werde nun dadurch gemessen, dafs sie dem fallenden Körper während jeder Zeitsekunde seines Fallens den constanten Geschwindigkeitszuwachs 2g beibringt: so ist $T = 2gt$, die Geschwindigkeit am Ende der t^{ten} Sekunde, eine Function des einzig veränderlichen t; und wenn man dann durch Differential- und Integral-Methode auf $u = gtt$ geschlossen hat, so pflegt man zu sagen, dafs man nunmehr die gesuchte u als Function von t gefunden habe, obgleich sie auch von g, der Fallhöhe in der ersten Secunde allerdings abhängig bleibt.

§. 4. Auch wo man die Veränderung einer in Frage genommenen Gröfse u, als von mehren veränderlichen x, y, z abhängig zu betrachten genöthigt ist, pflegt man sich die Untersuchung vermittelst der Differentialmethode nicht selten dadurch zu erleichtern, dafs man zuvörderst nur die eine x, dann erst eine andere y, u. s. w. als veränderlich behandelt; und selbst in diesen Fällen pflegt man zu sagen, dafs man die u zuvörderst nur als eine Function des x, dann als eine Function des y, u. s. w. behandeln wolle.

Durch diese und noch andere Betrachtungen, deren Erörterung hier zu weit führen würde, und die erste Entstehung des Function-Begriffes in der Analyse, mit dessen nach und nach eingetretenen Umänderungen betreffen müfste, sehe ich mich veranlafst, diesen Begriff, welcher gegenwärtig von einigen Lehrern dem §. 2. gemäfs gegeben wird, hier mit andern der Differential- und Integral-Methode angemessen einzuschränken; wobei es übrigens gerathen ist, zuvörderst nur für algebraische Functionen, oder doch nur vermittelst derselben für die

transscendenten sich auszudrücken. Denn indem wir bei den sämmtlichen algebraischen auch deren Behandlung, nebst dem zweckmäfsigen Erfolge dieser Behandlung werden kennen gelernt haben: so werden wir während des hier befolgten Vortrages, auch die allgemeinste und wesentlichste Eigenschaft aller Functionen, der algebraischen nnd nicht algebraischen, schon richtig und jenen Methoden angemessen, aufgefafst haben, welches dagegen im Voraus weniger gelingen, oder viel umständliche Erörterungen herbeiziehen würde.

Erklärung.

§. 5. Was entweder aus einer veränderlichen Gröfse x allein genommen, oder aus ihr und andern unveränderlichen Gröfsen, durch bestimmte algebraische Operationen entsteht, heifst eine algebraische Function von x; z. B. xx; $\sqrt{x}$, auch x selbst, sobald man es z. B. als 1. x betrachtet; desgleichen ax; $\frac{a}{x}$; $a^3 + bx^n$; $\frac{\sqrt{(a+bx)}}{ab+bx^2}$; $\sqrt[r]{(a+bx)^m}$ und der gleichgiltige Ausdruck $(a+bx)^{\frac{m}{r}}$.

Zusatz 1.

§. 6. Jede ihrer Gröfsen, wie n und $\frac{m}{r}$, welche als Potenzexponent vorkommt, mufs zu den beständigen, unveränderlichen gehören. Denn wenn sie selbst noch veränderlich wäre: so wäre ja diese Operation der Potenziirung noch nicht bestimmt angegeben, und würde dann eine transscendente, eine das Vermögen der Algebra überschreitende Operation verlangen können.

Der Ausdruck a^x ist daher keine algebraische Function des x, und wird sogleich durch unsere Erklärung davon ausgeschlossen. Nicht algebraische, sondern transscendente Functionen des x sind auch

z. B. die X im $X = \sin x$; $X = \tang x$; im Allgemeinen schon deſshalb, weil die Regeln zur Auffindung dieser X nur für einige Bogen und Winkel x, nicht für alle, durch die Operationen der Algebra genau können ausgedrückt werden. Eben so ist $X = \log x$ eine transscendente Function des x, weil in keinem logarithmischen Systeme für alle x die Auffindung ihrer Logarithmen durch algebraische Operationen genau kann bestimmt werden, sondern alles was algebraische Operationen dafür zu leisten vermögen, in solchen unendlichen Reihen besteht, welche die allgemeine Abhängigkeit zwischen dem Logarithmen und der logarithmisirten Gröſse desto genauer bestimmen, je weiter sie fortgesetzt werden; die völlige Genauigkeit aber nicht gewähren können, weil immerfort noch ein Rückstand der Fortsetzung übrig bleibt.

Zusatz 2.

§. 7. Die sechs algebraischen Operationen sind Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziiren und das Formieren der so genannten Gleichungswurzeln.

Das Potenziiren, das Auffinden einer n^{ten} Potenz, heiſst Erhebung zur n^{ten} Dignität, wenn n eine ganze Zahl ist, heiſst dagegen r^{te} Wurzelziehung, wenn $n = \frac{1}{r}$ ist, und kann sich in Potenzerhebung und Wurzelziehung zerlegen müssen, z. B. wenn $(6+2^3)^{\frac{m}{r}}$ als $\sqrt[r]{(6+2^3)^m}$ soll gefunden werden.

Eben diese Eintheilung kann auch auf verneinte n angewandt werden, weil $T^{-n} = \frac{1}{T^n} = \left(\frac{1}{T}\right)^n$ ist, die Stammgröſse T, oder im letztern Ausdrucke die Stammgröſse $\frac{1}{T}$ mag seyn, was sie will. (Vor-

erinnerung V.). Indessen war es hier nur Absicht darzulegen, dafs die Operationen der Potenzerhebung und der Wurzelziehung, welche in der gemeinen Ziffern-Arithmetik so sehr verschiedene Operationen ausmachen, in der Algebra dagegen vermittelst ihrer Potenzenrechnung, als eine einzige Operation aufgezählt werden können, und dessen ungeachtet die Formirung der Gleichungswurzeln z. B. die Angabe des $X = -\frac{x}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + B\right)}$ für die Gleichung $XX + xX = B$ aufser der Potenziirung noch andere Operationen mit benutzen mufs. Uebrigens wird man späterhin schon von selbst es bemerken, warum es schicklich war, die Formirung der Gleichungswurzeln, obgleich man sie für höhere als quadratische Gleichungen, allgemein brauchbar noch nicht zu leisten weifs, dennoch und sogar eben deshalb auch, als eine besondere algebraische Operation aufzuführen.

Zusatz 3.

§. 8. Das eben hergeschriebene X, auch eben so schon $X = \mp\sqrt{x}$ ist eine **zweiförmige** Function, und $X = \sqrt[3]{x}$ auch eben so $X = x^{\frac{1}{3}}$ eine **dreiförmige**, überhaupt $X = x^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{x^r}$ eine r förmige Function, weil es für jede r^{te} Wurzel r verschiedene algebraische Formen giebt.

Dergleichen r förmige Functionen werden in der Folge als r malig einförmige behandelt, indem ja **jede Form für sich** betrachtet werden mufs, wenn man aus **Veränderung der Grundgröfse** auf die **Veränderung der Function**, und dadurch **auf deren gegenseitige Aenderungsgesetze** schliefsen will.

§. 9. Eine Function von zwei veränderlichen Gröfsen, wäre sogleich $u = xy$, falls die x und y von einander unabhängig veränderlich sind. Wäre dagegen noch eine Abhängigkeit zwischen x und y gegeben, z. B. dafs $x+y=a$ seyn solle; so könnte man sogleich $u = ax - xx$ schreiben, und als Function des einzigen x behandeln. Eben so kann man eine Function von drei veränderlichen Gröfsen, wie $u = xyy + azz$ sogleich als Function von einer Veränderlichen darstellen, Falls uns zwei Gleichungen zwischen den drei veränderlichen Gröfsen gegeben sind, durch welche zwei derselben eliminirt (ausgesondert) werden können.

Indessen ist es auch in solchen Fällen meistens bequemer, oft auch zweckdienlicher, eine Function von mehren veränderlichen Gröfsen zuvörderst als solche zu behandeln, nämlich so zu behandeln, als ob die mehren veränderlichen Gröfsen von einander unabhängig veränderlich wären. Auch würde die Darstellung der Differenziirungs-Regeln unbequem zerstückelt werden, wenn man sie etwa Anfangs auf lauter Functionen von einer einzigen veränderlichen Gröfse einschränken wollte. Bei den wenigen Beispielen aber, die wir aus der allgemeinen Differenzenlehre hier voranschicken wollen, ist diese Einschränkung rathsam; weil die Absichten, weshalb sie hier beigebracht werden, durch Functionen mit einer einzigen veränderlichen Gröfse am kürzesten zu erreichen sind.

Zusatz 5.

§. 10. Auch unter solchen algebraischen Ausdrücken, die nur eine einzige veränderliche Gröfse x enthalten, giebt es mehrere

wie $X = \frac{x^n}{x^n}$; $X = x^n - x^n$; $X = \frac{aa - ax}{a - x}$

deren Gröfse $= x^0 = 1$; $= 0$; $= a$ bei aller Veränderung des x nnverändert bleibt, weil die arithmetischen Operationen, welche der Ausdruck angiebt, in Hinsicht des x einander aufhebend sind. Nach §. 5. müssen sie Functionen des x heifsen, und aus mehren Gründen würde es namentlich auch in Hinsicht der uns bevorstehenden Differential- und Integral-Methode nicht rathsam seyn, den dortigen Begriff so abzuändern, dafs sie ausgeschlossen würden. Da indessen bei ihnen einige von den Absichten getäuscht werden; weshalb man jene Methoden auf Functionen anzuwenden sucht, so mögen sie in dieser Hinsicht Scheinfunctionen heifsen.

Erklärung.

§. 11. X sey irgend eine Function des veränderlichen x, so wird durch $\triangle x$ ein beliebig zu wählender, doch dem x allemal gleichartiger und dadurch additiver Zusatz bedeutet, welchen man dem veränderlichen x eigenmächtig beilegt, um den durch ihn für die veränderliche Gröfse des X verursachten Zusatz $\triangle X$ zu finden.

Da es allgemeine Gewohnheit ist, den Zusatz $\triangle x$ eine Differenz des x, und den dadurch bewirkten Zusatz $\triangle X$ eine Differenz der Function X zu nennen: so wollen wir diesem Sprachgebrauche getreu bleiben, und ihn unserm Gedächtnisse beifällig durch die Vorstellung machen,

dafs doch $x + \triangle x$ um $\triangle x$ vom x,
und $X + \triangle X$ um $\triangle X$ vom X verschieden

ist, auch, wie wir sogleich sehen werden, $\triangle X$ als $X + \triangle X - X$ durch Abziehen gefunden wird.

Aufgabe,

§. 12. **Die Differenz ΔX einer Function X zu finden.**

Auflösung.

Statt eines jeden x, welches in der Function X vorkommt, schreibe man $x+\Delta x$. Was durch diese Belegung der Grundgröfse x aus X entsteht, werde durch X^1 angedeutet, und die belegte Function genannt: so kann man allemal

von der belegten Function $X^1 = X + \Delta X$
die unbelegte $X = X$ abziehen,
um dadurch $X^1 - X = \Delta X$ gefunden zu haben.

Beispiele.

I. Sey $X = ax$, so ist $X^1 = a(x+\Delta x) = ax + a\Delta x$
und $-X = \quad -ax$
also $\Delta X = a\Delta x$

II. Sey $X = ax^2$,
so ist $X^1 = a(x+\Delta x)^2 = a(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x \Delta x)$
und $-X = \quad -ax^2$
also $\Delta X = 2ax\Delta x + a\Delta x\Delta x$.

III. Sey $X = x^3$
so ist $X^1 = (x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$
und $-X = \quad -x^3$
also $\Delta X = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$

IV. Folglich für $X = ax^3$
auch $\Delta . ax^3 = 3ax^2\Delta x + 3ax\Delta x^2 + a\Delta x^3$

Zusatz 1.

§. 14. Im IIIten und IVten Beispiele haben wir Δx^2 statt $\Delta x . \Delta x$, und Δx^3 statt $\Delta x . \Delta x . \Delta x$ geschrie-

ben, welches auch eine eben so allgemeine als schickliche Gewohnheit ist; weil ja Δx nicht etwa erst anzeigt, dafs x mit einem Zusatze belegt werden soll, sondern Δx diesen Zusatz selbst schon bedeutet. Bei dieser einfachen Bedeutung des Δx würden ja, wenn man $(\Delta x)^3 = (\Delta x).(\Delta x).(\Delta x)$ schreiben wollte, die Klammern in der linken Gleichungsseite eben so überflüssig seyn, als sie in der rechten es sind.

Eben so wird ja auch, weil $\log x$ schon den Logarithmen das x, und sin arc x schon den sinus des Bogens x bedeutet, unter $\log x^n$ allemal $(\log x)^n$, und unter $\sin \text{arc } x^n$ allemal $(\sin \text{arc } x)^n$ verstanden. Obgleich einige Mathematiker mit Unrecht behaupten, dafs $(\text{arc sin } x)^n$ gar keinen Sinn haben könne: so war es doch schicklich einzuführen, dafs man diese Parenthese nur schreibe, wenn man den Sinus des Bogens zu nehmen verlangt, der eine dem n gemäfs erhöhte Proportionallinie zu 1 und arc x ausmacht, z. B. für $n = 3$ den Bogen z

$$\text{in } 1 : \text{arc } x = \text{arc } x : y$$
$$\text{und } 1 : \text{arc } x = y : z.$$

Zusatz 2.

§. 15. Indem nun aber $\Delta x^3 = (\Delta x)^3 = \Delta x.\Delta x.\Delta x$ bedeutet und bedeuten mufs: so wird dann freilich, um z. B. für die obige Function $X = x^3$ anzudeuten, dafs ΔX die Differenz des $X = x^3$ ausmacht, geschrieben

$$\Delta X = \Delta.\, x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

so dafs der Punct im $\Delta.\, x^3$ so viel bedeutet, als die Klammern in $\Delta(x^3)$ bedeuten würden.

Dieser bequemen Schreibart gemäfs wird nun überhaupt $\Delta.\, x^n$ so viel als $\Delta(x^n)$ bedeuten, nur dafs man doch der Klammern nicht entbehren kann, wenn

die Function aus mehren Gliedern besteht. Z. B. für $X = x^2 + a$ wird man $\Delta X = \Delta(x^2 + a)$ zu schreiben haben. Denn $\Delta . x^2 + a$ würde die Summen aus $\Delta(x^2)$ und a bedeuten müssen; da hingegen $\Delta(x^2 + a)$ nur $= \Delta . x^2 + o = \Delta . x^2$ bleibt, weil ja nur die veränderliche x mit einem Zusatze Δx zu belegen ist. (Etwa $\Delta . x^2 + a$, statt $\Delta(x^2 + a)$ zur Ersparung der Klammern zu schreiben, scheint hier nicht rathsam, obgleich es in solchen Reihenformeln, als z. B. in Vorerinnerung IV. vorkommen, allerdings geschehen kann, auch bereits üblich ist.)

Zusatz 7.

§. 16. Obgleich in dem belegten $x' = x + \Delta x$ der Zusatz Δx dem x während seiner ganzen Veränderlichkeit, also dieser seiner Veränderlichkeit unbeschadet, beigelegt seyn soll: so wird man doch nicht etwa verlangen können, auch einer beständigen Gröfse a, ihrer Beständigkeit unbeschadet einen Zusatz Δa beilegen zu wollen! Immerhin macht ja das Δx eine Veränderung in den Gröfsen des x aus, deren eine beständige, unveränderliche Gröfse, als solche, nicht fähig ist. Durch mehre Kenntnifs und Uebung in der Differenzen- und Differenzial-Methode wird es auch gehörig erkannt werden, dafs man niemals Veranlassung oder Bedürfnifs haben kann, auch die constanten Gröfsen mit einem Differential zu belegen; und unter welchen Umständen es schicklich zu sagen ist, dafs ihr Differential $= o$ sey.

Zusatz 4.

§. 17. Da die Belegung Δx eine dem x additive also ihm gleichartige Gröfse seyn mufs: so ist es allerdings gewifs, dafs die belegte Gröfse $x + \Delta x$ einer

von den Zuständen des x seyn muſs, wenn man sich diese x von diesem ihrem Zustande an stetig wachsend denkt; und so ist dann die Differenz der Unterschied zweier Zustände des x; von welcher Vorstellung man gewöhnlich auszugehen pflegt. Sicherlich aber ist es ungleich rathsamer und treffender, die Differenz Δx als eine **Belegung des x während seiner ganzen Veränderlichkeit** geradezu zu betrachten.

Ein praktischer Gebrauch des obigen $\Delta . x^2$

§. 16. Für $X = x^2$ haben wir bereits gefunden, daſs $\Delta X = \Delta . x^2 = 2x \Delta x + \Delta x^2$ ist.

Sey nun die Differenz Δx, welche wir dem x beilegen wollen, gerade $= 1$, also Δx ein bejahter Zuwachs $= 1$: so ist dann $\Delta . x^2 = 2x + 1$; wodurch wir z. B. sogleich wissen, daſs die

der natürlichen Zahlenreihe 1; 2; 3; 4; 5 etc. zugehörige Quadratzahlenreihe 1; 4; 9; 16; 25 etc.

dergestalt wachsen muſs, daſs für jedes in ihr gewähltes Glied xx das nächstfolgende $x^x x^x = (x + \Delta x) . (x + \Delta x) = (x + 1) (x + 1)$ um $2x + 1$ gröſser ist, wenn man statt x die Wurzel des gewählten Gliedes xx setzt.

Sey 16 das gewählte Glied, so ist $16 = xx$ und $x = 4$, folglich hier

$$x^x = x + \Delta x = x + 1 = 4 + 1 = 5,$$

also $x^x x^x - xx = 5 . 5 - 4 . 4$

das ist $\Delta . xx = 25 - 16$

das ist $2x + 1 = 2 . 4 + 1$

Und überhaupt ist durch dieses $\Delta . xx = 2x + 1$ erwiesen, daſs für die Reihe der xx, deren x von $x = 0$ an immerfort um 1 wächst,

also für die Reihe 0; 1; 4; 16; 25 etc.
die ungraden Zahlen 1; 3; 5; 7; 9 etc.

die Reihe der *ersten* **Differenzen** ausmachen.

Zweite Differenzen.

§. 19. Nicht nur $\Delta . xx = 2x + 1$, welches für $\Delta x = 1$ den Zuwachs des xx ausmacht, ist hier offenbar noch ferner eine Function von x, sondern es muſs auch überhaupt das allgemeine $\Delta . xx = 2x \Delta x + \Delta x \Delta x$ allemal eine Function des einzigen x, das heiſst lediglich eine Function von einer Veränderlichen (x) seyn, wenn wir uns fürs erste zur Regel machen, für die Belegung der Grundgröſse x, für die Differenz Δx jedesmal eine sich gleich bleibende, beständige Gröſse angenommen zu denken.

§. 20. Nicht nur wird die deutliche Ueberzeugung von der Bündigkeit des Verfahrens für den Anfänger ungemein erschwert, wenn sogleich im Anfange der Differenzenlehre auch die Δx selbst wiederum veränderlich gesetzt werden; sondern man hätte auch Recht, hierüber manchen Lehrbüchern noch härtere Vorwürfe zu machen. Wenn x die einzige veränderliche Gröſse ausmacht, so ist es nicht nur ganz unnöthig, sondern sogar zweckwidrig und unschicklich, das Δx selbst auch veränderlich annehmen zu wollen. Wenn dagegen die Differenzen- oder Differential-Methode oder (nach des Herrn Lagrange so genannter Functionenrechnung) das Skelett derselben, auf Gegenstände angelegt werden soll, wo man noch ungewiſs ist, für welche von ihren Gröſsen man das Gesetz ihrer gegenseitigen Abhängigkeit am ersten und zweckdienlichsten dürfte aufzufinden wissen, und für welche von den mehren Functionen und ihren verschiedenen Grundgröſsen man die primitive, unveränderlich annehmliche Differenz am schicklichsten dürfte anzulegen haben: so kann es allerdings nothwendig oder doch rathsam seyn, auch alle Belegungen der Grundgröſsen zuvörderst als selbst schon veränderliche Gröſsen zu betrachten.

§. 21. Da nun, auch nach angenommenem unveränderlichen Δx, die Differenz $\Delta . xx = 2x \Delta x + \Delta x \Delta x$ immer noch eine Function des veränderlichen x ist: so kann man fernerhin nach ihrem $\Delta\Delta . xx$, das heifst, nach dem Zusatze fragen, welcher für die erste Functionsdifferenz $\Delta . xx$ bewirkt wird, wenn man jedes in ihr vorhandene x abermals mit einem Δx belegt, wobei nun allemal vorausgesetzt wird, dafs dieses Δx dem vorhin gebrauchten völlig gleich seyn soll.

Erklärung.

§. 22. Ueberhaupt pflegt man solchen für die erste Differenz ΔX einer Function X bewirkten Zusatz durch $\Delta . \Delta X$, auch ohne Punct durch $\Delta\Delta X$, auch noch kürzer, durch $\Delta^2 X$, zu bezeichnen, und die zweite Differenz der Function zu nennen. Wir haben schon erinnert, dafs man die so genannte erste Differenz ΔX als $= X^x - X$ allerdings durch Abziehen findet, und wir werden sogleich sehen, dafs auch $\Delta . \Delta X$ durch ein ähnliches Verfahren gefunden wird.

Aufgabe.

§. 23. Die zweite Differenz $\Delta\Delta X$ einer Function X zu finden, nachdem ihre erste Differenz ΔX schon gefunden ist.

Auflösung.

Statt eines jeden x, welches im ΔX noch vorkommt, schreibe man $x + \Delta x$; und was dadurch aus ΔX entsteht, heifse $(\Delta X)^x$, die belegte Gröfse der ersten Differenz: so braucht man von dieser belegten Gröfse der ersten Differenz nur ihre unbelegte Gröfse ΔX abzuziehen, um $\Delta\Delta X = (\Delta X)^x - \Delta X$ zu erhalten.

Erstes Beispiel.

§. 24. Sey $X = xx$, so wissen wir bereits (§. 12) dafs $\Delta X = 2x\Delta x + \Delta x\,\Delta x$ ist. Da nun die belegte Gröfse $(\Delta X)^x = 2(x+\Delta x)\Delta x + \Delta x\,\Delta x$

und $-\Delta X = -2x\Delta x - \Delta x\,\Delta x$ ist:

so mufs dieses $\Delta\Delta X = 2\Delta x\Delta x$,

nämlich $\Delta\Delta xx = 2\Delta x\Delta x$ seyn.

§. 25. Da wir (§. 21) ausdrücklich festgesetzt haben, dafs allemal das Δx, mit welchem jedes im ΔX noch übrige x abermals belegt wird, dem bei der ersten Belegung gebrauchten Δx völlig gleich seyn soll, für dieses aber keine veränderliche Gröfse anzunehmen in §. 19. ausdrücklich bedungen wurde: so ist es hier gewifs, dafs die eben gefundene zweite Differenz der Function x^2 eine beständige (constante, unveränderliche) Gröfse ausmacht. Auch ist es nützlich zu bemerken, dafs die Form derselben, welche darin besteht, dafs sie das Duplum des Quadrates $\Delta x.\Delta x$ ausmacht, lediglich von der Form der Function, die Gröfse dieser zweiten Differenz aber nur von der Gröfse des angenommenen Δx, nicht auch von der veränderlichen Gröfse des x abhängig ist. Will man z. B. die Differenz $\Delta x = 1$ angenommen haben, so ist die zweite Functionsdifferenz $\Delta\Delta.x^2 = 2.1.1 = 2$ bei allen veränderlichen Werthen des x; oder will man die $\Delta x = 2$ angenommen haben, so ist $\Delta\Delta.x^2 = 2.2.2 = 8$ aller Veränderlichkeit des x unbeschadet.

Zweites Beispiel.

§. 26. Sey dagegen $X = x^3$, so wird auch die zweite Differenz $\Delta\Delta X$ noch eine Function des veränderlichen x bleiben. Erst die dritte Differenz $\Delta\Delta\Delta X$ wird kein x mehr enthalten, also bei ihrem, wiederum dem vorhin gebrauchten völlig gleich anzunehmenden Δx, selbst auch unveränderlich seyn.

Die folgende Darstellung legt zugleich vor Augen, wie überhaupt die Auffindung einer zweiten, und dann auch der dritten Differenz, durch die Betrachtung erleichtert und gut geordnet wird,

dafs die zweite Differenz $\triangle^2 X$ als erste Differenz aller Glieder des $\triangle X$

und die dritte Differenz $\triangle^3 X$ wiederum als erste Differenz aller Glieder des $\triangle^2 X$

kann gefunden werden.

Es ist $\triangle . x^3 = 3x^2 \triangle x + 3x \triangle x^2 + \triangle x^3$

schon gefunden (§. 15)

also $(\triangle . x^3)^1 = (3x^2 \triangle x)^2 + (3x \triangle x^2)^1 + \triangle x^3$

und $- \triangle . x^3 = -3x^2 \triangle x - 3x \triangle x^2 - \triangle x^3$

daher $\triangle . \triangle . x^3 = \triangle . 3x^2 \triangle x + \triangle . 3x \triangle x^2 + 0$

das ist $\triangle\triangle . x^3 = 3 . 2x \triangle x^2 + 3 \triangle x^3$

also $(\triangle\triangle . x^3)^1 = (3 . 2x \triangle x^2)^1 + 3 \triangle x^3$

und $- \triangle\triangle . x^3 = -3 . 2x \triangle x^2 - 3 \triangle x^3$

daher $\triangle\triangle\triangle x^3 = \triangle . 3 . 2x \triangle x^2 + 0$

das ist $\triangle\triangle\triangle x^3 = 3 . 2 . \triangle x^3$

Praktischer Gebrauch.

§. 27. Jede beliebige Zahl der ersten Säule, in welcher wir die natürliche Zahlenreihe aufgestellt haben, heifse x, so steht neben ihr in der zweiten Säule der Werth ihres xx.

x	xx	$\triangle . xx$	$\triangle . \triangle . xx$
1	1		
		3	
2	4		
		.....	2
..	.....	5	
			2
3	9		
		7	
4	16		2
		9	
5	25		

Unter dem Beding, dafs $\triangle x = 1$ angenommen sey, wird auch in der ersten Säule für jedes beliebige Glied, indem man sich dieses als $= x$ annimmt, in dem nächstfolgenden Gliede gerade das ihm zugehörige $x^1 = x + \triangle x$ angegeben; neben demselben in der zweiten Säule also auch $x^1 x^1$

Eben so allgemein werden in der dritten Säule die $x^1 x^1 - xx = \triangle . xx$ angegeben, und in der vierten Säule die $(\triangle . xx)^1 - \triangle xx = \triangle\triangle . xx$

Gesetzt nun, man habe die $\triangle . xx$ bis zu ihrem vierten Gliede 9 hin durch bloses Abziehen, $3 = 4 - 1$; $5 = 9 - 4$ u. s. w. aus der bis 25 hin verfertigten Säule der xx gefunden; und eben so habe man die hingeschriebenen drei Glieder der Säule $\triangle\triangle . xx$ durch bloſse Abziehung aus der schon bis 9 vorhandenen vorhergehenden Säule der ersten Differenzen gefunden: so wird die Erscheinung, dafs die ersten drei $\triangle\triangle . xx$ alle $= 2$ ausfallen, zur Versicherung dienen, dafs die Tafel der Quadratzahlen xx bis zum $xx = 25$ hin richtig sey.

Da wir ferner im voraus wissen, dafs jedes $\triangle\triangle . xx = 2$ seyn mufs: so hätten wir, sobald uns von den obigen Säulen nur der Anfang bis zu den punctirten Linien hin vor Augen stand, alle folgenden Glieder durch bloſses Addiren finden können. Denn $2 + 3$ mufs die 5, und $5 + 4$ die 9 geben. Ferner mufs dann $2 + 5$ die 7, auch $7 + 9$ die 16 geben. Hiermit liegt vor Augen, wie man die Quadratzahlen-Tafeln auf eine sehr leichte und sichere Weise verfertigen konnte.

§. 28. Eben so kann nach folgendem Schema

x	x^3	$\triangle.x^3$	$\triangle\triangle.x^3$	$\triangle\triangle\triangle.x^3$
1	1			
		7		
2	8		12	
		19		6
3	27		18	.....
		37	.....	6
4	64	.....	24	
	.....	61		
5	125		30	6
		91		
6	216			

die Tafel der Kubikzahlen durch blofses Addiren der dritten und zweiten, der zweiten und ersten Differenz mit leichter Mühe und grofser Sicherheit fortgesetzt werden.

Anm. Alle dem Geschäftsmanne nöthigen Rechnenknechte lassen sich auf diese Weise leicht verfertigen, weil man bei ihnen, wo nicht schon die zweiten, doch die dritten Differenzen, selten freilich ganz beständig, aber doch meistens so wenig veränderlich finden wird, dafs man sie für ziemlich lange Säulen des Rechnenknechtes ohne merklichen Fehler als unveränderlich gebrauchen kann.

Erklärung 1.

§. 29. Sey X eine beliebige Function von x, welche ihren Zusatz, so genannte Differenz $\triangle X$, eben dadurch erhält, dafs ihrer veränderlichen Grundgröfse x der beständige, unveränderliche Zusatz $\triangle x$ zugelegt ist: so würde der Ausdruck $\frac{\triangle X}{\triangle x}$ angeben, wie vielmal der Grundgröfse Zusatz $\triangle x$ in dem Functionszuwachse $\triangle X$ enthalten ist, falls $\triangle x$ und $\triangle X$, folglich auch x und X gleichartige Gröfsen sind,

oder doch dafür gesorgt ist, dafs sie arithmetisch als solche können behandelt werden. Sehr absichtlich aber wollen wir dergleichen nicht ausbedingen, sondern uns allgemeiner ausdrücken, und dieses $\frac{\triangle X}{\triangle x}$ den Differenzen-Quotienten nennen; auch hier unter Quotienten ganz allgemein die Gröfse verstehen, welche aus der $\triangle X$, durch $\triangle x$ divisorisch behandelt, als diejenige Gröfse sich ergiebt, welche durch $\triangle x$ multiplicatorisch behandelt, die $\triangle X$ wieder herstellen würde.

§. 30. Der Quotient $\frac{\triangle X}{\triangle x}$ mufs daher eine Gröfse von zwei Dimensionen seyn, wenn $\triangle X$ von drei Dimensionen, und $\triangle x$ die eine davon ist. Bei geometrischen Dimensionen also $\frac{\triangle X}{\triangle x}$ eine Fläche, wenn $\triangle X$ ein körperlicher Raum, und $\triangle x$ nur eine Linie ist; mufs dagegen, wenn x und daher auch $\triangle x$ eine Fläche ist, der Quotient $\frac{\triangle X}{\triangle x}$ eine lineäre Gröfse seyn.

Z. B. sey $X = x^3$ ein Kubus, dessen Seite x ist, so mufs der Differenzenquotient $\frac{\triangle . x^3}{\triangle x} = 3x^2 + 3x\triangle x + \triangle x^2$ eine Fläche seyn.

Für $X = xx$ ist der Differenzenquotient $\frac{\triangle X}{\triangle x} = 2x + \triangle x$, also eine Linie, wenn X ein Quadrat seyn soll.

Sey $Y = ay$, so ist der Differenzenquotient $\frac{\triangle Y}{\triangle y} = a$, also die constante Grundlinie a, wenn Y ein Rechteck über derselben mit veränderlicher Höhe y ist.

§. 31. Allerdings würde man statt des obigen Quotienten $\frac{\triangle . x^3}{\triangle x} = 3x^2 + 3x\triangle x + \triangle x\triangle x$ das

Verhältnifs $\frac{\Delta . x^3}{1.1.\Delta x} = 3\frac{x.x}{1.1} + 3\frac{x.\Delta x}{1.1} + \frac{\Delta x.\Delta x}{1.1}$ gebrauchen können, in welchem 1 die lineäre Einheit bedeutet, welche $\frac{x}{1}$ mal in der Linie x enthalten ist; wodurch man nun statt des vorigen Quotienten, welches eine Fläche war, die Gröfse eines Verhältnisses durch eine blofse Zahl ausgedrückt hat. Aber jene Quotienten gewähren ja eine so anschauliche Darstellung, dafs man vielmehr, auch wo man es mit blofsen Zahlen zu thun hat, die durch Geometrie veranlafsten Begriffe von Dimensionen auf sie anzuwenden suchen sollte.

§. 32. Arithmetische Dimensionen sind Multiplicatoren (Vorerinner. VI.) und der Differenzenquotient ist ein Product aus $m - n$ Multiplicatoren, wenn der Dividende ΔX ein Product aus m Factoren, der Divisor Δx ein Product aus n Factoren ist.

Gesetzt daher, es sey späterhin irgendwo Bedürfnifs, nicht $\frac{\Delta . x^3}{\Delta x}$ sondern $\frac{\Delta x}{\Delta . x^3}$ als den Differenzenquotienten zu betrachten: so brauchen wir nur zu bedenken, dafs $\frac{\Delta x}{\Delta . x^3}$ auch $= \frac{1.1.\Delta x}{\Delta . x^3}$ ist. Solche zu Hülfe genommene Multiplicatoren 1 müssen uns hier eben so gut verstattet seyn, als im vorigen §. die herbeigenommenen Divisoren 1.1.

Zweites Capitel.

Differentialquotient, der werdende, der gewordene genaue, Formenvollständige, Gröfsenvollständige. Calculatorische Erklärung der Differentiale. Vorläufige Erwähnung ihrer dimensorischen und phoronomischen Erklärung.

Erklärung.

§. 1. Der Function X allgemeiner Differenzenquotient $\frac{\Delta X}{\Delta x}$, dessen Δx jede noch so grofse oder noch so kleine Belegung der veränderlichen x bedeuten kann, allemal aber eine der x gleichartige Gröfse seyn mufs (I. §. 11), ist zum Differentialquotienten gemacht, und wird dann $\frac{dX}{dx}$ geschrieben, sobald man sich statt jenes Δx ein dx, als eine immerfort kleiner werdende und bis auf $=o$ hin stetig abnehmende Belegung der x gefordert denkt, und unter dX, die durch jenes dx bewirkte, also ebenfalls bis auf $=o$ hin abnehmende Belegtheit der mit x veränderlichen Functionsgröfse X versteht.

(Die mehren erweiterten Begriffe von Differentialquotienten zu beachten, ist erst späterhin rathsam, wenn wir den hier gegebenen werden erörtert und gerechtfertigt haben, der es nur mit einem Functions-Differentiale zu thun hat, und mit dem wir völlig aufs reine gekommen seyn müssen, wenn wir mit Consequenz und Deutlichkeit z. B. auch einen Differentialquotienten $\frac{dX}{dx}$ zulassen wollen, dessen Divisor dx selbst schon den Differentialquotienten einer andern Function x voraussetzt.

z. B. für $X = x^2$ ist $\frac{\Delta X}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, also der Differentialquotient $\frac{dX}{dx} = 2x + dx$.

Für $X = x^3$ ist $\frac{\Delta X}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$, also der Differentialquotient $\frac{dX}{dx} = 3x^2 + 3x\,dx + dx^2$.

Zusatz 1.

§. 2. Im letzten Beispiele hat man das von Δx und dx unabhängige Glied $3x^2$ (im ersten Beispiele, $2x$) als diejenige Gröfse vor Augen, welcher die mit dx veränderliche Gesammtgröfse des mehrgliedrigen Differentialquotienten immerfort sich nähert, so lange dx noch immerfort kleiner und kleiner werdend ist; und ganz genau $= 3x^2$ (im ersten Beispiele $= 2x$) mufs der Differentialquotient geworden seyn, wenn dx völlig $= o$ geworden ist.

Dieses $3x^2$ ist demnach für den Differentialquotienten $\frac{dX}{dx} = \frac{d.x^3}{dx}$, die Gränze seiner Näherungswerthe, oder deren letzter Werth, so lange man ihn selbst noch in seinem Werden begriffen denkt; kann aber mit vollem Rechte, und allgemeiner, auch für andere Differentialquotienten richtig, der genaue Werth, oder auch schlechthin der Werth, auch die Gröfse des Differentialquotienten von uns genannt werden, weil wir ja von seinem dx gefordert haben, dafs es bis auf $= o$ hin wirklich abnehmend seyn soll.

Allgemeiner richtig! weil es ja z. B. die Function $X = ax$ gibt, deren Differenzenquotient

$\frac{\Delta X}{\Delta x} = a$ keinen vom Δx noch abhängigen Werth hat, und deren Differentialquotient $\frac{dX}{dx} = a$ eben deshalb auch keine mit dx sich nähernden Werthe haben kann; daher wir hier einen Differentialquotienten vor uns sehen, der irgend einer Annäherung an einen Gränzwerth gar nicht unterworfen ist, indem er vielmehr für jede Gröfse des ΔX und des immerfort kleiner werdenden dx unverändert sich $= a$ angibt, und daher diese Angabe nach dem Gesetze der Stetigkeit auch für $dx = o$ seinen einzig richtigen, also auch seinen genauen Werth ausmachen mufs.

Zusatz 2.

§. 3. Wenn man die Verkleinerung des dx auch noch über die o hinaus also algebraisch in die negativen $-dx$ hinein fortsetzen wollte: so würde z. B. bei der eben erwähnten Function $X = ax$ immer noch auch $\frac{dX}{-dx} = a$ sich ergeben. Da nun zwischen solchen $+dx$ und $-dx$ das $dx = o$ den Uebergang ausmacht; so wird dadurch gleichsam eine anderseitige Bestätigung gewonnen, dafs das $\frac{dX}{dx} = a$ auch für $dx = o$ gehören müsse!

Aber die Forderung, dafs dx eine bis zur wirklichen Erreichung der o hin stetig abnehmende Gröfse seyn soll, ist zu allem, was wir für die Gröfsen der Differentialquotienten im allgemeinen zu fordern haben, hinreichend, und allem diesen geradezu angemessen.

Die obige Vorstellung von dem Gränzwerthe würde durch dieses $+dx$ und $-dx$ nicht gerettet seyn, da

man vielmehr hiermit seine Zuflucht zu einem Mittelwerthe genommen hätte.

§. 4. Auch ist es eine blofse Täuschung, wenn man meinet, dafs z. B. der obige Werth des $\frac{d.ax}{dx} = a$ dem $dx = o$ durch Mithülfe des $-dx$ überzeugender, als durch die bis auf $= o$ abnehmenden $+dx$ allein genommen, zugeignet werde. Was bei dieser Zueignung für unsere sinnlichen Vorstellungen unerreichbar bleibt, das kommt bei dem $+dx$ zu o werden, einmal, und bei dem o zu $-dx$ werden, zum zweiten Mahle vor. Einen stetigen Uebergang nämlich von einer Gröfse bis zu ihrem Nichts, und umgekehrt vom Nichts bis zur wirklichen Gröfse, vermögen wir durch unsere sinnlichen Vorstellungen nicht abzureichen; weil alle diese Vorstellungen ihrer Natur nach begränzt sind, zu jenem stetigen Uebergange aber unendlich kleine, unendlich getheilte Gröfsen erfordert werden.*)

§. 5. Dessen ungeachtet aber wird schon jeder Elementargeometer nicht nur für gewifs erkennen müssen, dafs der Winkel φ, (Fig. 1) wenn die CD sich in die CE hineindrehet, durch stetige Verklei-

*) Geübte Leser werden in der Folge von selbst bemerken, dafs mir mehre Gründe zu Gebote ständen, um dergleichen Rechtfertigung durch Mittelwerthe als unschicklich darzustellen; z. B. in III. §. 30, wo es erinnert wird, dafs die allgemein anerkannten Differentialformeln allemal die absolute Gröfse des x mit einem dx belegt, folglich jedes $x+dx$ als einen nächsten Zustand in der absoluten Gröfse des x voraussetzen, also das algebraische $+dx$ und $-dx$ neben einander zu solcher allgemeinen Rechtfertigung nicht herbei zu nehmen ist. Ganz etwas anderes ist es, wenn wir z. B. in der höhern Phoronomie $\frac{ds}{dt} = v$ auch als Mittelwerth rechtfertigen; u. s. w.

nerung wirklich $=0$ werdend seyn muſs, sondern auch durch die damit verbundene Drehung der CD, welche mit ihrem jedesmaligen Endpuncte D, die der CE parallele AB während der Drehung immerfort wirklich erreichend war, wird er sich völlig überzeugt wissen, daſs die CD am Ende dieser Drehung zur unendlich groſsen CE geworden seyn müsse, obgleich dieses Werden und Gewordenseyn eben so wenig durch unsere sinnlichen Vorstellungen abgereicht werden kann.

§. 6. So gewiſs es ist, daſs wir sogleich aus dem Differenzquotienten $\frac{\Delta X}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ mit einem Δx von beliebiger endlicher Gröſse, den letzten Werth $2x$ des Differentialquotienten $\frac{d.x^2}{dx}$ erhalten würden, wenn wir dieses Δx plötzlich $=0$ gesetzt fordern wollten, um *auf diese Weise* die Function $\frac{d.x^2}{dx} = 2x$ als eine aus $X = x^2$ abgeleitete Function zu erhalten, ohne *während dieser Ableitung* irgend einer unendlich kleinen Gröſse erwähnt zu haben: so ist dagegen zu bedenken, daſs die stetige Veränderung des dx und dX bis zum $=0$ hin, gerade diejenige Eigenschaft der Differentialmethode ausmacht, durch welche sie für die ebenfalls stetigen Veränderungen der Curven, und für die stetig wirkenden Kräfte bei Maschinen und Naturerscheinungen so vorzüglich anstellig, ja, ich kann hinzufügen, allein und einzig nur wahrhaft und wesentlich eingreifend geworden ist! (Daher man namentlich auch der angewandten Mathematik wegen, die wahrhafte Infinitesimalmethode in gröſsten Ehren halten, und dagegen das undankbare Verheimlichen

ihrer wahren Erfindungsgründe in des Herrn Lagrange Functionenrechnung, für unschicklich erklären sollte; und dieses um so mehr, da diejenigen Lehrer, welche auch in den besten bisherigen Lehrsystemen der Infinitesimalmethode dem unbefangenen Verstande allerdings widerstehend bleiben musten, von Herrn Lagrange keinesweges für unrichtig erkannt sind! sondern durch sein System nunmehr so bündig als die Lehren der uralten Elementargeometrie erwiesen seyn sollen!!)

§. 7. Keinesweges hat man zu fürchten, dafs wegen der dabei mit aufgeführten unendlich kleinen Gröfsen dx und dX, irgend ein kleiner, auch nur unendlich kleiner Fehler in den Resultaten bleiben möchte, die wir vermittelst dieser so genannten unendlich kleinen Gröfsen auffinden werden. Denn bei allen denen Resultaten, welche wir durch die Differentialmethode allein, ohne hinzukommende Integralmethode abschliefsen, werden wir nur derjenigen genauen Werthe der Differentialquotienten $\frac{dX}{dx}$ bedürfen, in welchen die dx und dX gar keine Gröfse mehr behalten haben, sondern $=0$ geworden sind. Für die Integralrechnung aber wird es dort erhellen, dafs nur noch aus der Form des dX, von dessen Gröfsen dergestalt unabhängig geschlossen wird, dafs man sich z. B. statt einer unendlichen kleinen Linie dx, nach Belieben auch eine Meilen lange denken kann, nachdem man zuvor durch völlig $=0$ gewordene dx, allerzu jenen Schlüssen völlig überflüssigen Formentheile völlig sich entledigt, und dadurch die kürzesten und deutlichsten Schlüsse sich verschafft hat.

§. 8. Nur denjenigen Werth des Differentialquotienten $\frac{dX}{dx}$, welcher nach verschwundenem, vernulltem dx und dX sich ergeben hat, wollen wir verstanden wissen, wenn wir ihn schlechthin den Differentialquotienten nennen. Da es aber theils während seiner Anstellung, während der Anlegung des Calculs, theils auch wegen gewöhnlich gewordener Vorstellungen und Ausdrücke (mit welchen wir eben deshalb auch bekannt seyn müssen) nützlich und nöthig ist, auch das Werden dieses letzten Zustandes, oder die Annäherung an denselben so anschaulich als möglich vor Augen zu stellen, und von jenem letzten Zustande selbst, Falls dieser von den vorgehenden wirklich verschieden ist, zu unterscheiden: so werden wir ihn $\frac{\partial X}{\partial x}$ während seines noch veränderlichen Zustandes schreiben, und den werdenden Differentialquotienten nennen, seinen letzten Zustand aber, in welchem er $= \frac{0}{0}$ geworden ist, wo wir neben jenem ihn ausgezeichnet andeuten wollen, den genauen Differentialquotienten nennen.

Z. B. für $X = x^3$ wird im $\frac{\partial . x^3}{\partial x} = 3x^2 + 3x\,\partial x + \partial x^2$ sein noch werdender, noch im Werden begriffener Werth, im $\frac{d . x^3}{dx} = 3x^2$ dagegen sein wirklich gewordener letzter Werth angegeben; und gerade nur dieser verdient der genaue (der vollendete) Werth genannt zu werden, weil meistens nur seinetwegen, um ihn mit Sicherheit und Anschaulichkeit zu gewinnen, der noch werdende Werth vorläufig dargestellt wird.

Zusatz 4.

§. 9. Allerdings aber wird es für einige **Formenfolgerungen**, auch schon in der Differentialrechnung, wenn wir sie mit völliger Deutlichkeit und Bestimmtheit einsehen und verstehen wollen, nothwendig seyn, aus dem **werdenden** Differentialquotienten $\frac{\partial X}{\partial x}$ zuvörderst auf den **gliedervollständigen** genauen Differentialquotienten $\frac{dX}{dx}$ und dann erst auf den schlechthin so genannten Differentialquotienten $\frac{dX}{dx}$ zu schliefsen; z. B. für obiges $X = x^3$,

dem **werdenden** $\frac{\partial . x^3}{\partial x} = 3x^2 + 3x\partial x + \partial x^2$ gemäfs

zuvörderst $\frac{d . x^3}{dx} = 3x^2 + 3x\,dx + dx^2$

dann erst $\frac{d . x^3}{dx} = 3x^2$ sich daszustellen.

Auch der mittlere, durch ein *d* von mehr als gewöhnlicher Gröfse angedeutet, ist schon ein **genauer** Differentialquotient, weil uns jedes dx, besonders aber wo vorher statt desselben ausdrücklich ∂x geschrieben war, ein wirklich $= o$ schon gewordenes Differential bedeuten soll; also durch $\frac{d . x^3}{dx} = 3x^2 + 3x . o + o . o$ die **Gröfse** des genauen Differentialquotienten eben so genau als durch $\frac{d . x^3}{dx} = 3x^2$ schon angegeben wird.

Zusatz 5.

§. 10. Da aber in dem $\frac{d . x^3}{dx}$ ausser seiner **Gröfse** $3x^2$ auch von den übrigen vernullten Gliedern ihre **Form** noch angegeben wird: so vermögen wir

aus diesem formvollständigen genauen Differentialquotienten zu schliefsen, dafs es für die Function $X = x^3$ ein werdendes $\frac{d.X}{dx} = 3x^2 + 3x\,dx + dx^2$ und daher auch ein endliches $\frac{\Delta X}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\,\Delta x + \Delta x^2$ also auch eine allgemeine Differenz $\Delta X = 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3$ gibt, welche eben deshalb eine allgemeine genannt wird, weil sie mit ihrem Δx sowohl endlich, als auch unendlich klein, und $= o$ werdend, auch $= o$ geworden seyn kann.

§. 11. Da sich nun in der Folge ergeben wird, dafs selbst auch diese allgemeine und endliche Differenz der Function $X = x^3$, aus ihrem $\frac{d.x^3}{dx} = 3x^2$ gefolgert und hergestellt werden kann, und eben dieses für alle andere Functionen nach und nach sich ergeben wird: so sind wir eben dadurch auch berechtigt, das genaue Differential $d.x^3 = 3x^2\,dx$, diesen ersten Theil des formenvollständigen Differenzials, für den wesentlichen Theil desselben anzuerkennen, durch welchen die Formen der sämmtlichen übrigen Glieder zugleich mit bestimmt sind.

Es wird nämlich in der Folge auch von uns dargethan werden, dafs man für jede Function X ihr formenvollständiges Differential

$$dX = p\,dx + \frac{1}{2}q\,dx^2 \frac{1}{2.3}r\,dx^3 + \frac{1}{2.3.4}s\,dx^4 \text{ etc.}$$

finden kann, wenn man $\frac{dX}{dx} = p$ gefunden hat, für dieses p, Falls es selbst noch eine Function von x ist, auch $\frac{dp}{dx} = q$ zu finden, und ferner, Falls q wiederum noch ein veränderliches x in sich hat, auch $\frac{dq}{dx} = r$ zu finden weifs, u. s. w.

§. 12. Wenn aber die Mathemathiker mit Euler, Calc. differentialis p. II. Cap. X., diese Reihe, die übrigens bisweilen mit einer endlichen Gliederzahl abbrechend, bisweilen ins Unendliche fortlaufend ist, geradezu das vollständige Differential des X nennen; so haben sie darin unrecht, weil sie es ganz offenbar auch von der vollständigen Gröfse des Differentiales, nicht blofs wie wir von der vollständigen Form desselben wollen verstanden wissen.

Zufolge dieser vollständigen Formenreihe, deren allgemeine Richtigkeit auch von mir anerkannt wird, mufs auch

$$dX = \left(p + \frac{1}{2}q\,dx + \frac{1}{2.3}r\,dx^2 + \frac{1}{2.3.4}s\,dx^3 + \text{etc.}\right).dx$$

$$\text{also auch} = \left(p + \left(\frac{1}{2}q + \frac{1}{2.3}r\,dx + \frac{1}{2.3.4}s\,dx^2 + \text{etc.}\right)dx\right)dx$$

$$\text{also auch} = \left(p + \left(\frac{1}{2}q + \left(\frac{1}{2.3}r + \frac{1}{2.3.4}s\,dx + \text{etc.}\right)dx\right)dx\right)dx$$

$$\text{also } \frac{dX}{dx} = p + \left(\frac{1}{2}q + \left(\frac{1}{2.3}r + \frac{1}{2.3.4}s\,dx + \text{etc.}\right)dx\right)dx \text{ seyn.}$$

Da nun, auch wenn q, r, s, etc. solche Functionen von x wären, die für einige Werthe ihres x einen unendlich grofsen Werth geben, dennoch auch bei diesen Werthen des x allemal $q.dx = o$, und $r.dx = o$ geworden seyn mufs, sobald dx völlig $= o$ geworden ist (Vorerinnerung X §. 9): so mufs nun, auch zufolge jener vollständigen Formenreihe, mit $dx = o$ geworden,

allemal $\frac{dX}{dx} = p + o + o + o$

das ist $\frac{dX}{dx} = p$, die genaue Gröfse des Differentialquotienten, folglich $dX = p.dx = p.o$ allemal die vollständige Gröfse des Functionsdifferentiales dX seyn.

§. 13. Mag nun immerhin p selbst eine sol Function des x seyn, welche bei einigen Werthen res x sich unendlich grofs ergeben müfste (z. B. $\frac{1}{x-a}$, welches für $x=a$ sich $=\frac{1}{0}=\infty$ ergeben m so ist es ja in der eben angeführten Vorerinneri schon dargethan, dafs gleichwohl, auch für so Werthe des x, allemal $p.0=0$ seyn mufs.

Da nun hiermit auch für diese Fälle $p=\infty$ Satze Genüge geschieht, dafs die Gröfse der Wi dX selbst auch $=0$ geworden seyn müsse, die Gröfse der Ursachen $dx=0$ geworden ist: s wir derjenigen calculatorischen Erscheinung völli ledigt, durch welche Euler und die übrigen matiker, welche die Infinitesimalmethode befolgen genöthigt glaubten, für solche Fälle durch eine S inquisition ein anderes dX aufzufinden. Die Ve denheit zwischen diesem speciellen und dem allgemeinen, durch die allgemeinen Differenziirungsregeln aufgefundenen Differential $dX=p.dx$, mufs natürlich darin bestehen, dafs durch das specielle Verfahren ein anderer Coefficient statt p gefunden wird. In dem IIIten Anhange zu der Abhandlung *Formulae radii osculatoris quoad valores earum positivos ac negativos et ventilatae et diligentius quam fieri solet explicatae, Dresdae in officina Arnoldi* 1824 habe ich dargethan, dafs dieses specielle Verfahren den Gründen der Differenziirung nicht gemäfs ist, auch bei Euler u.s.w., namentlich eben so auch durch Lagrange nach seinem Functionscalcul, ein falsches p (bei Lagrange also eine falsche *Fonction derivée*) dadurch gefunden wird. *)

*) Es entgeht mir nicht, dafs man auch durch Anwendung der Differentialmethode auf die Curven, in jener Meinung sich gar sehr bestätigt glaubte. Späterhin werden wir diese irrige Anschauung als solche anschaulich dar-

Genaue Gröfse des Functions-Differentials.

§. 14. Demnach behaupten wir, dafs $dX = p\,dx$ al die vollständige und richtige Gröfse enauen Functionsdifferentials ausmacht, welche diglich darin besteht, dafs dX mit $dx = o$ gewor- ne p oder p-malige o geworden ist; so wie die les genauen Differentialquotienten $\frac{dX}{dx} = p$ eben- $dx = o$ geworden, und daher auch ein $= o$ nes dX verlangt,

so, wie $\frac{dX}{dx} = p$ schlechthin der Differen- nt der Function X genannt wird (bis wir hin etwa neben einem zweiten $\frac{ddX}{dx\,dx} = q$, uch wohl dritten $\frac{dddX}{dx\,dx\,dx} = r$, u. s. w. als ersten zu unterscheiden haben) eben so wird auch $dX = p\,dx$ schlechthin das Differential genannt (bis wir es späterhin von höheren Differentialen zu unterscheiden haben.)

§. 15. Dieselbe Gröfse p, welche im $\frac{dX}{dx} = p$ als ein Quotient vor Augen steht, macht im $dX = p.\,dx$ einen Factor des Productes dX neben dessen andern Factor dx aus, und mag daher auch von uns der Differential-Coefficient genannt werden, wo es das rathsamste, das kürzeste ist, aus der Form dieses Differentials zu schliefsen, namentlich in der Integralrechnung, wo wir aus der Form des dX auf die Form des X zurück zu schliesen suchen werden;

---

zustellen wissen. Ein $\frac{1}{\infty} = o$ geworden gibt man zu, und will es gleichwohl nicht wagen, dem ∞ einen vollendeten Zustand ∞ zuzugestehen!

auch schon in der Differentialrechnung, wo von blofsen Formenveränderungen die Rede ist, und es ein unnöthiger Umweg seyn würde, erst vermittelst der Differentialquotienten auf sie zu schliefsen.

§. 16. Absichtlich habe ich den im $\frac{dX}{dx} = \frac{o}{o} = p$ durch $dx = o$ geworden, sich ergebenden Werth p des Differentialquotienten einen genauen Werth genannt, mit andern Lehrern etwa einen endlichen oder bestimmten Werth nicht nennen wollen. Denn wenn man bedenkt, dafs doch p in den allermeisten Fällen selbst noch eine Function des x ausmacht, deren Werthe bisweilen noch alle Gröfsen vom $-\infty$ bis zum $+\infty$ durchlaufend seyn können, nicht allemal durch Gränzen ihrer Möglichkeit auf eine Reihe von lauter endlichen Werthen eingeschränkt sind, und einen schon bestimmten Werth selbst auch in diesem Falle offenbar noch nicht haben, indem er vielmehr innerhalb solcher Gränzen beliebig veränderlich seyn soll: so erhellet wohl, dafs man dieses p einen endlichen und bestimmten Werth nur deshalb genannt hat, weil er von dem dx unabhängig geworden seyn soll, von welchem man zu behaupten pflegte, dafs es nur unendlich kleiner werdend immerfort gedacht, also irgend einen endlichen, bestimmten Werth (wie es $dx = o$ sicherlich ist) niemals erreichend seyn solle.

Dafs aber die Gröfse des schlechthin so genannten Differentialquotienten, das heifst, desjenigen, dessen $dx = o$ geworden seyn soll, durch das p des $\frac{dX}{dx} = \frac{o}{o} = p$, genau angegeben werde, dessen sind wir darum völlig gewifs, weil wir von jedem nachfolgenden Gliede des formvollständigen $\frac{dX}{dx} = p + Qdx + Rdx^2$ etc.

gewifs sind, dafs jedes Glied dieser Reihe, mit dx = o geworden, bei jedem Werthe des X ganz genau = o seyn mufs, also jeder durch die gewöhnliche Differenziirungs-Methode und ihre Reihe für p noch veränderliche Zusatz nur einem völligen Nichts an Gröfse gleich seyn könnte.

§. 17. Obgleich nun eben dadurch einleuchtet, dafs der bisher von uns nur gegebene calculatorische Begriff der Differentialquotienten (vorausgesetzt, dafs er in der Folge auch auf die in §. 1. schon erwähnten $\frac{dX}{dx}$, desgleichen auf Functionen von mehren veränderlichen Gröfsen mit seiner bisherigen Genauigkeit fortgeführt wird) sich hinreichend beweisen mufs, uns die genaue Gröfse aller Differentialquotienten zu gewähren, durch welche alle Resultate der Differentialrechnung abgeschlossen werden; auch aus der genauen Gröfse des Differentialquotienten $\frac{dX}{dx} = \overset{\cdot}{p}$ die vollständige Gröfse des genauen Differentiales $dX = p\,dx = p.o$ folgt (§. 12.), aus deren Form in der Integralrechnung auf die Form der X zurückgeschlossen wird: so wird es immerhin noch nützlich und willkommen seyn, dafs wir im IVten Capitel auch noch einen anschaulichen, dimensorischen Begriff der genauen Gröfse des Differentialquotienten, und dadurch auch den anschaulichen dimensorischen Begriff des Functions-Differentiales aufstellen.

Da diese dimensorische Anschaulichkeit bis auf drei Dimensionen hin wenigstens rein geometrisch ist, so hat sie in dieser Hinsicht methodische Vorzüge vor derjenigen, welche uns Newtons Fluxionen-Calcul ebenfalls sehr scharf und richtig gewähren könnte, wenn wir hier schon Begriffe der höheren Phoronomie, namentlich den scharfen Begriff von Geschwin-

digkeit und dessen bündigen Gebrauch voraussetzen könnten. (Sowohl an dem richtigen Begriffe von Geschwindigkeit, als an dessen bündigem Gebrauche für die Mechanik, hat es meines Erachtens auch lange nach Newton gefehlt. M. s. meine Theorie der Höllschen Wassersäulenmaschine. (Freiberg 1804. Cap. 6.)

Drittes Capitel.

Werthbestimmung einiger $\frac{0}{0}$ ***durch gemeine Analysis. Geometrische Rechtfertigung unserer Nullenrechnung. Erörterung über die unendliche Kleinheit der Differentiale uud ihre stetige Verschwindung. Ur- und Folgedifferential. Allgemein vorausgesetzte Regel für das*** $\mp$ ***der Urdifferentiale. Constante Urdifferentiale.***

Einige $\frac{0}{0}$ *der gemeinen Analysis.*

§. 1. So einleuchtend es auch schon durch alle bisher behandelte Functionen, besonders vermittelst ihres werdenden Differentialquotienten $\frac{\text{'d X}}{\text{'dx}} = p + Q\text{'dx} + R\text{'dx}^2 + S\text{'dx}^3 + \text{etc.}$, z. B. im $\frac{\text{'d. x}^2}{\text{'d x}} = 2x + \text{'dx} + 0$, oder $\frac{\text{'d. ax}^3}{\text{'dx}} = 3ax^2 + 3ax\text{'dx} + \text{'dx'dx} + 0$ vor Augen liegt, daſs mit $dx = 0$ ganz genau $\frac{d.x^2}{dx}$

$= 2x$ und $\frac{d.ax^3}{dx} = 3ax^2$ geworden seyn muſs, wir also durch dieses Verfahren auf solche $\frac{dX}{dx}$ zu kommen wissen, welche $= \frac{0}{0}$ geworden, und **zugleich auch den Werth p dieses** $\frac{0}{0}$ bestimmend sind: so kann es doch nicht schaden, nach dem Beispiele anderer Lehrbücher es darzulegen, wie auch in anderweitiger Analyse, ohne Differenzen- und Differential-Methode, **solche gebrochene** Functionen sich ergeben, die bei **gewissen** Werthen ihres x ein $= \frac{0}{0}$ ausmachen, und gleichwohl für dieselben Werthe des x einen ganz bestimmten Werth in sich haben müssen.

Beispiel 1.

§. 2. Der gebrochene Ausdruck $\frac{a\sqrt{ax} - xx}{a - \sqrt{ax}}$ muſs für $x = a$ sowohl im Zähler, als im Nenner sich vernullen, und dennoch läſst es sich darthun, daſs eben dieser Ausdruck unter dem Beding, daſs $x = a$ gesetzt werde, gerade ein $\frac{0}{0} = 3a$ seyn muſs. Denn der Ausdruck ist ja, wie man durch dessen Dividirung mit $\sqrt{a} - \sqrt{x}$ es finden kann, $= \frac{a\sqrt{x} + x\sqrt{a} + x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$. $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \frac{a\sqrt{x} + x\sqrt{a} + x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$, also $= a + a + a$ für $x = a$.

(Herleitungen bei andern Mathematikern, welche diesem Ausdrucke für $x = a$ einen Doppelwerth $= 3a$ und $= 1.a$ bestimmen, sind unrichtig. (**Vorerinnerung I.**)

Beispiel 2.

§. 3. Sey $S = a.\frac{e^n - 1}{e - 1}$, die bekannte Formel für die Summe einer geometrischen Reihe von n Gliedern, deren Exponent $= e$, und erstes Glied $= a$ ist.

Für alle beliebige Werthe des a und n, auch e, giebt sie die Summe S mit völliger Bestimmtheit an, den einzigen Fall, da $e = 1$ ist, ausgenommen. Dafür giebt sie $S = a.\frac{1-1}{1-1} = a.\frac{0}{0}$; und gleichwohl mufs doch bei $e = 1$, z. B. für $n = 4$ die Summe $S = a.4$, also $\frac{0}{0} = 4$ seyn.

Die beiderseitige Vernullung im Zähler und Nenner der Formel rührt auch hier davon her, dafs der Nenner $e - 1$ zugleich als Factor im Zähler steckt.

Durch bekannte Division wird $\frac{e^4-1}{e-1} = e^3 + e^2 + e + 1$ gefunden; und da man hierdurch weifs, dafs $S = a.\frac{e^4-1}{e-1} = a.(e-1).\frac{1+e+e^2+e^3}{e-1}$ ist, so sieht man deutlich ein, weshalb die Formel ihrer Form wegen für $e = 1$ nichts zu bestimmen vermag, ihre bestimmende Kraft aber auch für diesen Fall wiederum gewonnen wird, wenn man sie ihrer vernullenden Factoren entledigt.

§. 4. Anmerk. Indem für $e = 1$ nicht nur $e - 1 = 0$, sondern auch $e^4 - 1 = 0$ ist, so wird bei dieser Entledigung allerdings mit einer o in eine andere o dividirt. Die Feinde der Nullenrechnung, welche einem Lehrbuche der Infinitesimalrechnung das Garaus zu machen glauben, wenn sie es eine Nullenrechnung nennen, mögen doch an diesen beiden Beispielen es erkennen, dafs dergleichen Nullenrechnung schon in der endlichen Analyse das kür-

zeste und deutlichste Mittel ist, solcher Unbestimmtheiten sich zu entledigen, welche durch mehre Nullen, eben deshalb verursacht werden können, weil es von einander in so fern verschiedne Nullen giebt, als z. B. für $e = 1$ die obige $e - 1$ eine einfache, die $e^4 - 1$ aber dergleichen 4 fache o seyn muſs. Jeder Differentialquotient $\frac{dX}{dx}$ versichert uns, daſs dX eine pmalige $dx = o$ ist, daher wir durch das Nullensystem der Infinitesimalrechnung, solche $\frac{o}{o}$ auch bei sehr verwickelten Functionen einer bequemen und ordnungsvollen Werthbestimmung in einem späteren Capitel der Differentialrechnung werden zu unterwerfen wissen.

Ein drittes, äuſserst merkwürdiges Beispiel

§. 5. sey die Function $\frac{c^n - 1}{n}$, welche für $n = o$ auch ein $\frac{c^o - 1}{o} = \frac{1 - 1}{o} = \frac{o}{o}$ ist, und eben dann auch $= c - 1 + \frac{(c-1)^2}{2} + \frac{(c-1)^3}{3} +$ etc. durch folgende Reihenentwickelung sich ergiebt. Da $c^n = (1 + [c-1])^n$ seyn muſs, so haben wir vermittelst der Iten Binomialreihe (Vorerinner. V. §. 1.)

auch $c^n = 1 + \frac{n}{1}(c-1) + \frac{n.n-1.}{1.2}(c-1)^2 + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3.}(c-1)^3 +$ etc.

also $\frac{c^n - 1}{n} = \frac{c-1}{1} + \frac{n-1}{2}(c-1)^2 + \frac{n.-1.n-2.}{2.3}(c-1)^3 +$ etc. für jeden Werth des n, folglich auch für $n = o$.

Auch hier werden wir dieses folglich am kür-

zesten darstellen und rechtfertigen können, wenn wir zuvörderst

$$\frac{c^{dx}-1}{dx} = \frac{c-1}{1} + \frac{dx-1.}{2}(c-1)^2 + \frac{dx-1.dx-2.}{2\ 3}(c-1)^3 + \text{etc.}$$

schreiben, und auch, nachdem wir uns bereits $dx = o$ geworden, denken und fordern, immer noch $\frac{c^{dx}-1}{dx} = \frac{c-1}{1} - \frac{(c-1)^2}{2} + \frac{(c-1)^3}{3} - \frac{(c-1)^4}{4} + \text{etc.}$ schreiben, nämlich in demjenigen Ausdrucke, dessen Werth wir für $dx = o$ geworden, zu wissen verlangen, immer noch dx statt o schreiben, um uns daran erinnert zu halten, dafs wir dieser nach und nach bis auf $= o$ verminderten Gröfse die Darstellung dieses Werthes zu verdanken haben. Dazu bleibt nämlich dx eben deshalb schon geschickt, weil wir solche bis auf $= o$ verminderte Gröfse bei jedem dx uns zu denken gewohnt sind, obgleich übrigens dx hier nicht als Differential dem n zugelegt, sondern selbst statt n gesetzt ist; welches späterhin allerdings zu beachten seyn wird.

Ausgemacht convergirend ist der Ertrag dieser Reihe für jedes noch so grofse c, wie wir es absichtlich in Vorerinner. IV. §. 15. schon dargethan haben. Aber nur für ein $c < z$ ist sie augenfällig von ihrem ersten Gliede an sogleich convergent.

§. 6. Wenn wir uns dagegen der IIten Binomialreihe (Vorerinner. V. §. 10.) zur Entwickelung des $c^n = (1 + [c-1])^n$ bedienen, so erhalten wir

$$c^n = 1^n + \frac{n}{1}\cdot\frac{c-1}{c} + \frac{n.n+1.}{1.\ 2.}\,1^n.\left(\frac{c-1}{c}\right)^2 + \frac{n.n+1.\ n+2}{1.\ 2.\ 3.}\cdot 1^n\left(\frac{c-1}{c}\right)^3 + \text{etc.}$$

$$0\ \frac{c^n-1}{n} = \frac{c-1}{c} + \frac{n+1}{2}\left(\frac{c-1}{c}\right)^2 + \frac{n+1.\ n+2.}{2\quad 3}\left(\frac{c-1}{c}\right)^3 + \text{etc.}$$

also, wie vorhin $n = dx$ gesetzt, und dieses bis zum $= 0$ sich vermindert gedacht,

$$\frac{c^{dx}-1}{dx} = \frac{c-1}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{c}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{c-1}{c}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{c-1}{c}\right)^4 + \text{etc.}$$

Da nun diese Reihe für jedes bejahte, noch so grofse oder noch so kleine c von Anfang an convergent ist: so liegt es durch sie noch deutlicher als durch die vorige Reihe vor Augen, dafs der Werth des Quotienten $\frac{c^{dx}-1}{dx}$, der für ein $dx = 0$ geworden allerdings $= \frac{c^0-1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ geworden seyn mufs, gleichwohl einen gewissen von c abhängigen Werth hat, dem wir durch unendlichen Verfolg der Reihe unendlich näher und näher kommen, den wir aber niemals genau abreichen können, den einzigen Fall ausgenommen, dafs $c = 1$ gegeben wäre, da man in diesem Falle $\frac{1^{dx}-1}{dx} = \frac{0}{0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{0.0}{1.1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{0.0.0}{1.1.1}$ + etc. erhält, also daraus sieht, dafs die Gröfse dieses $\frac{0}{0} = 0$ ganz genau ist.

§. 7. Man setze das bejahte $c = \frac{z}{n}$, so erhält man die Reihe

$$\frac{\left(\frac{z}{n}\right)^{dx}-1}{dx} = \frac{z-n}{z} + \frac{1}{2}\left(\frac{z-n}{z}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z-n}{z}\right)^3 + \text{etc.},$$

welche auch für jedes gleichbezeichnete z und

n convergent bleibt, und daher für $n > z$, also für jeden Bruch kleiner als 1, einen verneinten Ertrag, für jedes $n < z$ einen bejahten Ertrag giebt, wodurch nun ebenfalls ihr $= o$ für $n = z$, das ist für $c = \frac{z}{n} = 1$ bestätigt wird.

Geometrische Rechtfertigung unserer Nullenrechnung.

§. 8. Das folgende geometrische Beispiel wird es vor Augen legen, dafs man die Lage einer die Curve AMM² in M berührenden Linie MT (Fig. 2.), auf eine äufserst kurze, einleuchtende Weise mit völligster Genauigkeit gerade nur dadurch zu bestimmen vermag, dafs man die zur Anlage des Calculs gebrauchten Differentiale aufs völligste $= o$ werden läfst.

Die Linie AE sey eine beliebig angenommene lineäre Einheit, nach welcher die Abscissen $AP = x$ gemessen, auch die $x = \frac{AP}{AE}$ als Zahlen angegeben werden; und die Curve AMM² sey so gezeichnet, dafs jede einer Abscisse x zugehörige normale Ordinate $y = X = xx$ sey, folglich diese Function X des x als Linie y dargestellt, die dritte Proportionale in $1 : x = x : y$ sey.

§. 9. In der Function $y = xx$ die x mit $\triangle x$ belegt hat man

$$y^2 = xx + 2x\,\triangle x + \triangle x\,\triangle x$$

also

$$\triangle y = 2x\,\triangle x + \triangle x\,\triangle x$$

In der Figur hat man $\triangle y = NM^2$, wenn $\triangle x = PP^2 = MN$ genommen ist; und der Differenzenquotient $\frac{\triangle y}{\triangle x} = 2x + \triangle x$ zeigt an, dafs $MN : NM^2 = 1 : 2x + \triangle x$ ist: durch welches Verhältnifs die Lage der Sehne MM² (gegen die MN, also auch gegen die Abscissenlinie AP) auf das genaueste bestimmt wird.

§. 10. Werde nun statt des bestimmten Wachsthumes $\triangle x = PP^1$ ein $'dx$ angenommen, welches immerfort kleiner und kleiner werdend gedacht werden soll, so mufs dann der durch dieses $'dx$ bewirkte Wachsthum der Function $X = y$ ein $'dX = 'dy$, und der noch **werdende Differentialquotient** $\frac{'dy}{'dx} = 2x + 'dx$ seyn.

Je kleiner $'dx$ bereits geworden ist, je kleiner mufs auch diese Sehne MM^1 geworden seyn, aber erst dann, wenn durch stetige Verkleinerung des $'dx$ dasselbe wirklich ein $dx = o$ geworden ist, erst dann kann und mufs die punctirte **Lage der Sehne** völlig zur **Lage der Tangente SMT geworden seyn.**

Dann aber hat man hier den letzten Werth des werdenden Differentialquotienten, den genauen Differentialquotienten $\frac{dX}{dx} = 2x$ als ein $\frac{o}{o} = 2x$; und wenn man $MF = AE = 1$, und $AF : FT = 1 : 2x$ gezeichnet hat, so wird durch die **MT die Lage der Tangente SMT ganz genau bestimmt, weil ganz genau und völlig** $dx = o$ **geworden ist.**

§. 11. Sogleich aus dem Anblicke der Curve in Fig. 2. ist es einleuchtend, dafs man ein angelegtes $'dx$ schon in seiner ersten Gröfse nicht gröfser als PP^1 sich denken dürfte, wenn sogleich mit angehender Verkleinerung des $'dx$ auch die ihm zugehörigen $'dy = NM$ immerfort kleiner und kleiner geworden, nicht etwa anfangs steigend und fallend sich ergeben sollen. In dieser Hinsicht ist es ganz schicklich zu sagen, dafs man sogleich die angelegten $'dx$ **unendlich klein angelegt verlangen**, dabei aber immer noch von ihnen verlangen wolle, dafs sie wirklich und stetig $= o$ werdend und geworden seyn sollen.

Unendliche Kleinheit der Differentiale und ihre stetige Verschwindung.

§. 12. Allerdings pflegt man von mancherlei Grössen zu behaupten, dafs sie ohne Ende immerfort kleiner und kleiner werdend sind und bleiben, sich dem $=0$ ohn Ende immerfort nähern, und doch dieses ihr Nichts niemals erreichen können; z. B. in der Geometrie die Entfernung zwischen einem unendlichen Schenkel der Hyperbel und Asymptote; welches aber nur richtig ist, so lange man sich die dem Schenkel zugehörige Axen-Abscisse x nur $=\infty$, immer noch ohne Ende gröfser und gröfser werdend denkt. Der dem vollgrofsen $x=\infty$ zugehörige Schenkel wird die Asymptote treffend geworden seyn müssen; auch sie schneidend freilich ebenfalls deshalb nicht werden können, weil das Vollgrofse einer fernern Vergröfserung nicht fähig ist.

In der Arithmetik wird es z. B. in der abnehmenden so genannten geometrischen Reihe $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{8} ; \frac{1}{16}$ u. s. w. ohne Ende, durch das Gesetz dieser Zahlreihe verhindert, dafs man jemals ihr Ende o durch eines ihrer Glieder erreicht angeben könnte. Dafs dieses Ende aber als $=0$ wirklich vorhanden sey, beweiset die geometrische Construction dieser Glieder, vermittelst ihrer stetigen Begränzungen AC und BC (Fig. 3.); welches die wahren Begränzungen sind, weil sie
auch für die Reihe $1 ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{27}$ u. s. w.

überhaupt für die Reihe $1 ; \frac{1}{\infty} ; \frac{1}{\infty\infty} ; \frac{1}{\infty\infty\infty}$

u. s. w. gehören, dessen ∞ eine immerfort gröfser und gröfser angenommene Zahl bedeutet.

Lediglich durch das Gesetz dieser Zahlenreihe wird es verhindert, ihr Ende als ein letztes Glied derselben durch irgend eine Zahl angeben zu können. Verlangt man nun aber die Gröfse des letzten Gliedes unabhängig von der gesetzlichen Gliederform angegeben zu wissen: so ist es auch arithmetisch ausgemacht gewifs, dafs es durch die Angabe $=0$ geschehen könne und müsse; weil ja jedes noch so kleine Etwas, so lange es noch nicht völlig $=0$ ist, durch das arithmetische Gesetz der Reihe selbst als immer noch zu grofs zurück gewiesen würde.

§. 13. Sollten wir in der Folge irgendwo genöthigt seyn, solch einem Gesetze des Abnehmens auch unsere im Kleinerwerden noch begriffenen Differentiale zu unterwerfen: so würden wir in solchen Fällen allerdings mit der Gewifsheit uns begnügen müssen, dafs doch auch solch ein dx dem $=0$ ohn Ende immerfort näher und näher kommend seyn soll, also auch ein noch so kleiner angeblicher Unterschied zwischen ihm und der 0 uns niemals aufgebürdet werden könnte; indem ja wir mit solchem dx vor jedem ihm vorgeworfenen noch so kleinen Unterschiede zwischen ihm und der 0, immerfort schon den Vorsprung hätten.

§. 14. Ungleich kürzer und netter aber werden wir zu unserm Ziele gelangen können, und auch wirklich gelangt seyn, wo wir geradezu von allen Differentialen behaupten können, dafs sie auf das völligste verschwinden, auf das völligste $=0$ werdend und geworden seyn sollen.

Da wir nun als ausgemacht gewifs behaupten (§. 14.), dafs in jedem durch ein dx bewirkten Functionsdifferentiale dx, die Gröfse dieser Wirkung, zugleich mit der Gröfse ihrer Ursache dx sich

vernullen muſs, die dx aber eine eigenmächtige angenommene Belegung der x ist, welche dieser veränderlichen Gröſse während ihrer ganzen möglichen Veränderlichkeit zugelegt gedacht werden soll: so kann nur noch die Frage seyn, ob wir bei jedem x ermächtigt sind, eine bis auf $=0$ völlig abnehmende Belegung dx zu fordern?

Falls nun x selbst eine stetige Gröſse ist: so ist es einleuchtend, daſs man auch von der ihr allemal gleichartigen Belegung dx, daſs sie eine bis zum $=0$ abnehmende und stetig abnehmende Gröſse seyn solle, zu fordern berechtigt sey.

§. 15. Wie nun aber, wenn die x und ihre Function X, welche der Differentialrechnung unterworfen werden, keine stetigen, sondern diskrete Gröſsen sind! Wie kann man da vom dx verlangen, daſs es stetig abnehmend gedacht werden solle? Ich erwiedere, daſs wir es nur mit solchen diskreten Gröſsen zu thun haben können, welche der Messung unterworfen sind, und jede Messung diskreter Gröſsen einem Zahlsysteme unterworfen seyn muſs. Jede zwei Zahlen a und x aber können in Hinsicht ihres subtractiven (so genannten arithmetischen) sowohl als ihres divisorischen (so genannten geometrischen) Verhältnisses durch zwei Linien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ dargestellt werden. Der Zahl x werde ein beliebiger Zusatz $\triangle x$ zugelegt, so giebt es eine diesem $\triangle x$ entsprechende Linie $\triangle \mathfrak{x}$. Diese Linie kann stetig abnehmend bis zum $=0$ hin seyn. Die ihr entsprechende stetige Abnahme der Zahl $\triangle x$ bis auf $=0$ hin, kann durch Zahlen nicht abgereicht werden; ist aber dessen ungeachtet eben so gewiſs vorhanden, als die Gröſse der irrationalen Quadratwurzel $\sqrt{7}$ vorhanden ist, obgleich sie durch Zahlen nicht genau abgereicht wer-

den kann, auch das Verhältnifs $\frac{\text{arc } x}{\sin \text{arc } x}$ geometrisch-genau vorhanden ist, obgleich es durch keine Zahlen ganz genau ausgedrückt werden kann.

§. 16. Wenn ich daher fordere; man solle auch bei diskreten Gröfsen x das Abnehmen ihres dx bis zum $=o$ hin stetig sich denken: so fordere ich, man solle nicht zugestehen, dafs man sich dieses Abnehmen etwa gerade durch 100otel, oder 10000tel gemessen denke, sondern durch unendlich kleine Bruchtheile, die man sich nämlich ohn Ende immer kleiner und kleiner angenommen denken soll.

Obgleich ich hiermit eingestehe, dafs man sich bei discreten Gröfsen (x) damit begnügen mufs, die stetige Abnahme ihres dx bis zum $=o$ hin, nur unendlich nahe kommend, niemals ganz genau durch discrete Gröfsen sich vorstellen zu können: so wissen wir doch, dafs auch bei ihnen ihre Verkleinerung bis zum $=o$ hin wirklich vorhanden seyn mufs, und so wird von uns, selbst auch bei discreten Gröfsen der genaue Werth des Differentialquotienten $\frac{dX}{dx} = p$, folglich auch die Gröfse des genauen Differentiales $dX = p.dx = p.o$, allemal völliger abgereicht, als es selbst auch bei stetigen Gröfsen in der Theorie von denen Lehrern geschieht, welche jedes Differential immer noch unendlich klein, niemals $=o$ geworden wissen wollen; ich sage in der Theorie, denn in der Anwendung wird auch von ihnen, genau betrachtet, das $=o$ geworden seyn, gleichsam wider ihren Willen zugelassen.

Unterscheidung zwischen Ur- und Folge-Differential.

§. 17. In $y = x^3$ ist y eine Function des x, und x die so genannte Grundgröfse dieser Function. In

dem daraus gefolgerten $x = \sqrt[3]{Y}$ kann x als die Function, und Y als ihre Grundgröfse betrachtet werden. Den Anfängern zum Besten aber werde ich fürs erste fernerhin diejenige veränderliche Gröfse, welche als Grundgröfse der Function zu betrachten seyn soll, durch einen kleinen Buchstaben, und die Function durch einen gleichnamigen grofsen bezeichnen, z. B. $X = x^3$ und $Y = \sqrt[3]{y}$ schreiben, damit man fernerhin sich erinnert finde, zwischen dem Differential der Grundgröfse und dem Differential der Function zu unterscheiden, unserm bisherigen Vortrage gemäfs allemal der Grundgröfse x oder y zuvörderst und ursprünglich das Differential dx oder dy zugelegt sich zu denken, das Differential der Function dX oder dY dagegen als ein aus jenem dx, oder dy und der Functionsbeschaffenheit gefolgertes Differential zu betrachten.

§. 18. Jede solche veränderliche Gröfse, welcher unmittelbar ein Differential zugelegt wird, pflegt von mehren Lehrern eine unabhängig veränderliche, auch primitiv veränderliche Gröfse genannt zu werden. Allerdings wird es meistens der Fall seyn, dafs man gerade diejenigen veränderlichen Gröfsen, welche schon in der gemeinen Analytik als die zuvörderst veränderlich gedachten, ursprünglich und beliebig veränderlichen sich darstellen, und von uns in Vorerinnerung III, die vorveränderlichen genannt sind, auch in der Differentialmethode ursprünglich, zuvörderst und gleichsam eigenmächtig, mit einem ihnen selbst gleichartigen Zusatze, dem so genannten Differentiale derselben belegt; z. B. das x in der Function $X = x^3$.

Wesentlicher nöthig zu beachten ist es, dafs das x im $x + dx$ durchaus noch eben so veränderlich

seyn und bleiben soll, als es für sich allein genommen, vor seiner Belegung mit dx es irgend seyn sollte und konnte; so dafs $x + dx$ eine mit dx belegte veränderliche Gröfse ist, und eben dadurch für ihre Function X die Belegtheit dX bewirkt wird; so lange nämlich dem dx noch einige Gröfse zukommt, und daher auch dem dx dergleichen zukommen kann. Ist bereits $dx = 0$, und eben deshalb auch $dX = 0$ geworden, so ist dann $x + dx = x + 0$ ein mit dx belegt gewesenes x, und $X + dX = X + 0$ ein durch dx mit dX belegt gewesenes X.

§. 19. Nach solcher und nach anderweitiger Ansicht der Sache, die sich dem aufmerksamen Leser in der Folge bei Behandlung mehrer neben einander belegten Variabeln von selbst darbieten wird, scheint es mir das rathsamste, jedes zuvörderst und gleichsam eigenmächtig beigelegte Differential ein Urdifferential, und jedes daraus gefolgerte ein Folgedifferential zu nennen.

Jede mit einem Urdifferential belegte veränderliche Gröfse mag dann eine urbelegte, und jede dadurch mit belegte veränderliche Gröfse eine folglich belegte heifsen.

Das Urdifferential dx des x im $X = x^3$ ist gleichsam das active, wirkende, und dagegen dX das passive, bewirkte Differential.

§. 20. Dafs beides, sowohl jede urbelegte, als jede folglich belegte, allemal an sich veränderliche Gröfsen seyen, braucht eigentlich nicht ausdrücklich erinnert zu werden, weil alles, was die Differentialmethode zu leisten vermag, für nicht veränderliche, beständige Gröfsen der Untersuchung gar kein Bedürfnifs ist, auch sogleich das Urdifferential, so lange es noch in seinem $= 0$ werden begriffen ist, einen Gröfsenzusatz ausmacht, dergleichen ja einer un-

veränderlichen, beständigen Gröfse, als solcher nicht aufgebürdet werden kann, und gleichwohl zugelegt gewesen seyn müfste, um das zu finden, was durch die Differentialmethode gefunden werden soll.

§. 21. Sowohl jedes ursprünglich beigelegte dx, als auch jedes daraus gefolgerte dX wird fernerhin ein Differential von uns genannt. Dieser ganz allgemein gewöhnliche Name kann nicht nur durch die Vorstellung, dafs $x+dx$ und x während aller beliebigen Veränderung des x, um dx, auch $X+dX$ und X während aller Veränderlichkeit des X, um dX von einander unterschieden bleiben, gerechtfertigt werden; sondern wenn man blofs Veränderung statt Differenz oder Differential sagen wollte, so könnte man ohne dahin gerichtete Vorsicht gar zu leicht in das Gebiet des Variations-Calculs gerathen; und wenn man lieber Accrescenz statt Differenz sagen wollte (wozu man sich veranlafst finden könnte, weil das regelmäfsige Differential allemal einen Zusatz zur absoluten Grofsheit des x ausmacht) so müfste auch Accrescentialrechnung statt Differentialrechnung genannt werden.

§. 22. Uebrigens ist es im IIten Cap. schon bemerklich gemacht, dafs der Ausdruck Differential das Diminutivum der Differenz bedeuten soll. Wie aber neben dem Urdifferentiale dx (welches uns eine unendlich klein angelegte und dann völlig zum $=o$ hin abnehmende Zulage zum x bedeutet) wenn wir blofs dessen noch werdende veränderliche Zustände vor dem völligen $=o$ verstanden wissen wollen, durch 'dx andeuten; auch dadurch nicht nur im Functions-Differential dX ebenfalls seine noch dem $=o$ sich nähernden Gröfsen 'dX unterscheiden, sondern überdies auch durch dX das gliederformvollständige vom dX unterscheiden können, welches als schlechthin ge-

nanntes Differential nur als pdx dessen p sfaches $dx = o$ bestimmen soll: so erhellet von selbst, dafs wir nicht, mit Lacroix, ein solches $dX = pdx + Qdx^2 + Rdx^3$ etc. noch eine Differenz nennen wollen und können, sondern unter Differenz allemal eine solche verstehen, die auf ein Differential noch nicht eingeschränkt ist, vielmehr jeden beliebig grofsen, also auch endlichen Werth haben kann; und dafs wir nicht pdx ein Differenzial oder Differenzchen defshalb nennen können, weil es nur einen Theil des dX ausmache, indem wir vielmehr in der Folge in allen einzelen Fällen es darthun werden, dafs pdx die gesammte Gröfse des dX gerade dadurch ausmacht, dafs es völlig ein $pdx = p.o$ geworden ist.

§. 23. Dafs jedes Functionsdifferential ein $dX = pdx + Qdx^2 + Rdx^3$ etc. ist, nämlich das erste Differential einer jeden x-Function allemal dieser Form kann unterworfen werden, ist allerdings ein wichtiger Satz, den ich aber im Anfange der Differentialrechnung mit deutlicher Bündigkeit nicht zu erweisen weifs, sondern nur vorläufig darlege, damit man darauf merke, wie alle dX, die wir nach und nach finden lernen, dieser Form allerdings unterwerfbar sind, von deren Coefficienten p, Q, R etc. jeder eine Function von x ist, allerdings aber für einige X sogar schon der erste Coefficient p eine bloſse Scheinfunction ausmacht, da dann sogleich jeder der nachfolgenden Coefficienten für sich $= o$ ist, und die Reihe mit dem ersten Gliede pdx beendigt ist.

§. 24. Jedes noch werdende Functionsdifferential

$'dX = p'dx + Q'dx^2 + R'dx^3$ etc. ist allerdings

ein $= p.\frac{1}{\alpha} + Q.\frac{1.1.}{\alpha\alpha} + R.\frac{1.1.1.}{\alpha\alpha\alpha}$ etc.

und jedes vollendete Functionsdifferential
$dX = p\,dx + Q\,dx^2 + R\,dx^3$ etc. ist allerdings
ein $= P.\frac{1}{\infty} + Q.\frac{1.\,1}{\infty\infty} + Q.\frac{1.\,1.\,1}{\infty\infty\infty}$ etc.; und es können diese Ausdrücke vermittelst der aus Vorerinnerung VII. bekannten Bedeutungen der $\propto$ und ∞ allerdings richtig verstanden werden; auch wenn wir uns unter der 1 lediglich eine allgemeine Zahleneinheit, also unter $\frac{1}{\propto}$ einen noch immerfort kleiner werdenden und unter $\frac{1}{\infty}$ einen völlig $= 0$ gewordenen Zahlbruch vorstellen; aber die Dimensionen-Richtigkeit der ganzen Gleichung fordert es anders.

§. 25. Wenn wir uns nämlich ein noch werdendes, und ein schon vollendetes Urdifferential 'dx und dx oder 'dy und dy durch das werdende und vollendete Unendlich grofs $\propto$ und ∞ darstellen wollen: so sind wir in Gefahr darin zu viel oder zu wenig zu thun.

Wollten wir $'dx = \frac{x}{\propto}$, und $'dy = \frac{y}{\propto}$ schreiben, so hätten wir zu viel bestimmt. Denn wegen der (in Vorerrinnerung VIII.) gelehrten nothwendigen gleichzeitigen Gleichheit der $\propto$ müfste ja 'dx während seines Kleinerwerdens zugleich dem x selbst proportional, und eben so 'dy während seines Kleinerwerdens zugleich dem y proportional bleibend seyn, so dafs beide 'dx und 'dy neben einander gebraucht, allemal $'dx : 'dy = x : y$ verlangt, auch das einzelne $'dx = \frac{x}{\propto}$, aufser dem durch $\frac{1}{\propto}$ geforderten kleiner werden, auch der veränderlichen Gröfse des x immerfort proportional bleibend seyn müfste.

(Dergleichen 'dx und 'dy würden zu den verän-

lichen Urdifferentialen gehören, auch eine besondere seltene Art derselben ausmachen; da wir doch für jetzt, und bis wir späterhin ausdrücklich der veränderlichen Urdifferentialien erwähnen, allemal so genannte constante Urdifferentiale angenommen und gefordert voraussetzen wollen; die wir sogleich näher erklären werden.)

Wollten wir dagegen blofs $'dx = \frac{1}{\infty}$ und $'dy = \frac{1}{\infty}$ schreiben, so hätten wir zu wenig ausgedrückt, lediglich ausgedrückt, dafs dx eine immerfort kleiner werdende Gröfse seyn solle, nicht aber auch mit angedeutet, dafs 'dx eine dem x, und 'dy eine dem y gleichartige Gröfse seyn mufs!

§. 26. Man schreibe $'dx = \frac{x^0}{\infty}$, und $'dy = \frac{y^0}{\infty}$, so ist auch diese den Urdifferentialen wesentlich nöthige Gleichartigkeit (welche für die Folgedifferentiale dann ebenfalls sich ergiebt) mit ausgedrückt, indem $x^0 = 1$ eine dem x, und $y^0 = 1$ eine dem y gleichartige Einheit andeutet. Nachdem indessen dieses hiermit deutlich erörtert ist, werden wir allerdings in der Folge bisweilen auch, wie in §. 24., der Kürze wegen schreiben.

Constante Urdifferentiale.

§. 27. Obgleich jedes $'dx = \frac{x^0}{\infty}$ als eine bis zum $dx = 0$ immerfort und stetig kleiner werdende Gröfse, und in so fern also veränderliche Gröfse gedacht werden mufs und soll; so kann man doch dabei fordern, dafs diese ihre Veränderlichkeit von der Veränderlichkeit des x ganz unabhängig, für gröfsere oder

kleinere Werthe des x keinesweges verschieden, sondern in jedem gleichzeitigen Zustande ihres Kleinerwerdens bei allen noch so verschiedenen Gröfsen des veränderlichen x allemal einerlei, in dieser Hinsicht also constant, und demnach selbst auch mit einem Differential belegt zu werden unfähig seyn soll (§. 13).

§. 28. Dergleichen von x unabhängige, mit dem veränderlichen x nicht veränderlich abnehmende Gröfse eines Differentials kann nun schlechterdings nur für ein Urdifferential allgemein und im voraus gefordert werden. Denn was die Folgedifferentiale (§. 19.) betrifft, so kommt es, auch wenn ihr Urdifferential schon constant gewählt ist, auf die Function an, ob ihr Differential constant oder veränderlich seyn werde.

Ist $X = ax$ so ist $'dx = a'dx$, also auch dX constant, wenn dx constant gefordert ist. Ist dagegen $X = x^2$ so ist $dX = 2xdx$, also auch bei constantem dx dennoch dX mit x, und zwar demselben proportional veränderlich.

§. 29. Allemal daher, wo man in Lehrbüchern bei dem Vortrage der Differenziirungs-Regeln constante Differentiale gefordert findet, hat man constante Urdifferentiale zu verstehen.

In I. §. 19.20. wo wir nur endliche $\triangle x$, noch nicht unendlich kleine dx angelegt hatten, war die Constantheit derselben äufserst leicht zu begreifen. Es war dort lediglich zu erinnern, dafs beim Aufsuchen der zweiten Differenz jedes x der noch übrigen Function ebenfalls mit demselben $\triangle x$ belegt werden mufs; und eben so beim Aufsuchen der dritten und fernern Differenz (I. §. 21.).

Hieraus können wir für diejenige Constantheit der $'dx$, welche im spätern Capitel VIII. auch bei dem zweiten, dritten etc. Differentialisiren für die

constanten Urdifferentiale dx vorausgesetzt wird, uns die Vorstellung machen, dafs dergleichen nach einander gebrauchte 'dx ; 'dx ; 'dx u. s. w. immerfort ein $\triangle x = \triangle x = \triangle x$ in jedem einzelen Zeitpuncte ihres Kleinerwerdens ausmachen sollen, unbeschadet der Forderung, dafs man diese $\triangle x$ bis zum $'dx = dx = o$ geworden hin, immerfort kleiner und kleiner sich zu denken hat.

Bejahte und verneinte Urdifferentiale.

§. 30. Da ich bisher der bejahten und verneinten Gröfsen nicht erwähnt habe, so wird man namentlich auch bei jedem bisher genannten x und dessen Belegung dx nur an deren absolute Gröfsen zu denken veranlafst gewesen seyn; wie es auch um so mehr meine Absicht war, weil ich als allgemeine Regel aufstellen kann:

Alle gewöhnlichen und allgemein befolgten Formen der Functionsdifferentiale, wie wir sie z. B. für die sämmtlichen algebraischen Functionen in dem VI. Capitel, für andere transcendente Functionen in spätern Capiteln beibringen werden, setzen voraus, dafs das der Grundgröfse beigelegte Urdifferential dx einen Zusatz zur absoluten Gröfse des x ausmachen, folglich allemal jedes $+x$ mit einem $+dx$, jedes $-x$ mit einem $-dx$ belegt gedacht werde.

Diese Regel ist auch durchaus so schicklich, dafs man sich darin nicht mufs irren lassen, wenn von Herrn Klügel in seinem mathematischen Wörterbuche es anders verlangt wird. (M. s. den 1ten Anhang zu der schon erwähnten Abhandlung *Formulae radii osculatoris etc.*). Auch von uns wird diese Regel so allgemein vorausgesetzt, dafs wir es allemal ausdrücklich erinnern werden, ein gegenseitiges

Urdifferential gewählt zu haben, falls wir in besondern Fällen ein $+x$ mit einem $-dx$, oder ein $-x$ mit einem $+dx$ belegt fordern sollten.

§. 31. Schlechterdings nur bei den Urdifferentialen kann die Frage entstehen, ob man es bejaht oder verneint gefordert und angelegt haben wolle! Ob das daraus dann folgende Functionsdifferential dx eine bejahte oder verneinte Gröfse sey, das mufs erst mit gefunden, mit gefolgert werden. Eben so auch, ob etwa das gefolgerte dX eigentlich weder bejaht noch verneint, sondern nur schlechthin eine absolute Gröfse seyn müsse, wobei uns denn die in Algebraischer Auflösung etc. von mir erwiesenen Lehren zu statten kommen, dafs jede Gröfse, welche weder bejaht noch verneint seyn kann oder soll, neben andern bejahten oder verneinten Gröfsen, allemal und nothwendig als eine bejahte zu behandeln ist, woraus sogleich erhellet, dafs in der Differentialrechnung jedes x, welches weder bejaht noch verneint seyn, sondern nur von absoluter Gröfsheit seyn solle, neben andern bejahten und verneinten Gröfsen regelmäfsig mit einem $+dx$ zu belegen ist.

§. 32. Da wir jedes $dx = o$ geworden, also auch jedes $+dx = +o$ und jedes $-dx = -o$ geworden fordern, so sind wir eben dadurch gewifs, dafs das Functionsdifferential $dX = pdx$, um uns anschaulich auszusprechen, dem Endpuncte der Linie x, allgemeiner ausgedrückt, der veränderlichen Endgränze der Gröfse x zugehört. Und selbst auch für diejenigen Fälle, wo dergleichen Endgränze den Scheidungspunct zwischen den möglichen und den unmöglichen x ausmacht, werden wir dem Vorwurfe, als ob wir vermittelst einer unmöglichen Belegung dx geschlossen hätten, auf folgende Weise entgehen.

Gesetzt, man habe den Kreis nach der Gleichung

$yy = aa - xx$ construirt, und $AB = 2a$ sey dessen Durchmesser, in welchem von dem Mittelpuncte C aus die bejahten Abscissen $CP = x$ und die verneinten $C\mathfrak{P} = x$ genommen werden: so wird durch $C\mathfrak{P} = -a$, des Durchmessers eine Begränzung A, durch $CP = +a$ dessen andere Begränzung B erreicht.

Wollten wir nun, nachdem wir durch die, §. 30. aufgeführte, regelmäfsige Belegung der x, den werdenden Quotienten $\frac{'dy}{dx} = \frac{-2x + 'dx}{2y + 'dy}$, und daher sowohl für jedes $(+)x$ als auch $(-)x$ den genauen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ und demnach das genaue Differential $dy = -\frac{x}{y}dx = -\frac{x}{y}, o$ gefunden hätten, auch $(-)x = -a$ oder $(+)x = +a$ plötzlich zu setzen uns erlauben: so müfsten wir eingestehen, dafs wir in Hinsicht dieser Anwendungen mit unserm $-dx$, auch $+dx$, in die unmöglichen Gröfsen hinein gegriffen hätten!

Gut! so wollen wir uns nicht erlauben, das aufgefundene $\frac{'dy}{'dx} = \frac{-2x + 'dx}{2x + 'dy}$ geradezu auf $x = a$, sondern nur höchstens auf $x = a - 'dx$ anzuwenden, wofür denn auch der x nächster Zustand $x + 'dx = a + 'dx - 'dx$ immer noch eine mögliche Gröfse ist.

Indem wir dann unsere Belegung $'dx$ völlig $= o$ werden und geworden verlangen, so haben wir eben dadurch auch die Anwendung auf $X + o = a + o - o$ erreicht, ohne während dieser Anwendung jemals eines unmöglichen Beleges nöthig gehabt zu haben,

§. 33. Wer dagegen die dx völlig $= o$ geworden zu fordern Bedenken trägt, wird hier dem erwähnten Vorwurfe immerhin etwas ausgesetzt bleiben. Soll auch hier die Rechtfertigung eintreten, dafs man nur

einen unendlich kleinen Gebrauch von den unmöglichen x mache, der sich also durch etwas anders als o gar nicht angeben lasse: so dürfte doch hier die Einwendung eintreten, dafs zwischen einem möglichen x und einem unmöglichen dx gar keine Gröfsenvergleichung Statt finde!

Schädlicher für den Erfolg ist es, dafs sich mit diesen blofs unendlich kleinen, nicht völlig $=o$ gewordenen $+dx$ und $-dx$ die Meinung einschleicht, als ob die dadurch gefundenen Differentiale und Differentialquotienten nicht völlig genau, sondern nur Näherungsweise den Endpuncten der x, also für $-x$ eigentlich dem Elemente $-dx$, für $+x$ dem Elemente $+dx$ zugehörig seyn möchten!

(Sollten hier die Leser meiner Neuen Methode des Gröfsten und Kleinsten mir entgegnen, dafs ja gerade ich selbst dort vom $+dx$ und $-dx$ für einerlei x verschiedenen Gebrauch gemacht habe: so müssen sie zugleich bedenken, dafs ich dadurch lediglich zwischen einer $+o$ und $-o$, wie sie in Vorerinnerung V, schon erklärt sind, zu unterscheiden verlangte.)

Viertes Capitel.

Dimensorische Erklärung für Differentialquotienten und Differentiale.

§. 1. I. Wenn eine Function X, folglich auch ihre Differenz ΔX und ihr Differential, sowohl das werdende 'dX, als eben deshalb auch das bereits $=o$

gewordene dX, eine Gröfse von m Dimensionen ist, die urbelegte Grundgröfse x aber, folglich auch ihr $\triangle x$, ihr 'dx und dx nur n Dimensionen hat: so ist der Differenzenquotient $\frac{\triangle X}{\triangle x}$, folglich auch der werdende und der genaue Differentialquotient $\frac{'dX}{'dx}$ und $\frac{dX}{dx}$ eine Gröfse von m — n Dimensionen.

II. Der genaue Differentialquotient $\frac{dX}{dx} = p$ ist diejenige veränderliche Endgränze der Function X, welche wegen des veränderlichen x veränderlich ist.

Hat die Function noch andere veränderliche Grundgröfsen y und z, so sind die Differentialquotienten $\frac{dX}{dy} = 'p$, $\frac{dX}{dz} = ''p$ die übrigen mit y und z veränderlichen Endgränzen der Function.

III. Das werdende Differential $'dX = p'dx + Q'dx^2$ + etc. ist ein an der mit x veränderlichen Endgränze der Function ihr beigelegter, unendlich kleiner Wachsthum, der mit $'dx = dx = o$ zum genauen Differential $dX = p\,dx = p.o$ geworden, als Wachsthum der Function allerdings durch Vernullung seiner Dimension dx auch selbst sich vernullt hat, dabei aber noch die mit x veränderliche Endgränze p der Function, als den übrigen Factor, den hier so genannten Coefficienten des $dX = p.dx = p.o$ enthält.*)

*) Da das Differential $dX = p\,dx$ schon ein Theil der Function X seyn würde, wenn dx nicht $= o$ wäre, und man in der Integralrechnung aus der Endgränze p auf die Function X zurück zu schliefsen sucht: so wird man schon im voraus vermuthen können, dafs hierzu die Form $p\,dx$ geschickter, als der ganz reine Ausdruck x

Hat die Function mehre veränderliche Grundgröfsen x, y, z etc., so mufs ihr genaues Gesammtdifferential aus der Summe der einzelen $p\,dx + {}'p\,dy + {}''p\,dz$ etc. bestehen, die nun mit dx, dy und dz $= o$ geworden, einen vernullten Functionswachsthum $(p + {}'p + {}''p).o$ ausmachen, und neben dieser o einen andern Factor, als die Summe der sämmtlichen mit x, y, z veränderlichen Endgränzen der Function ebenfalls nicht enthalten können.

Zur anschaulichen Darstellung dieser Behauptungen werden uns aus unserm bisherigen Vortrage folgende Beispiele geliefert.

§. 2. Sey die Function $X = x^3$ ein Kubus, dessen Seite die Linie x ist: so ist auch die belegte Function $X^1 = (x + \triangle x)^3$ eine körperliche Gröfse, und daher auch beider Differenz $\triangle . x^3 = 3x^2\triangle x + 3x\triangle x^2 + \triangle x^3$ auch eben so $'d.x^3 = 3x^2\,'dx + 3x\,'dx^2 + 'dx^3$ noch immerfort eine körperliche Gröfse von 3 lineären Dimensionen; und $d.x^3 = 3x^2\,dx$, mufs nicht nur, nach dem Gesetze der Stetigkeit, bei seiner Verschwindung in der Klasse der körperlichen Gröfsen geblieben seyn; sondern kann auch nur als solche körperliche Gröfse $= o$ geworden seyn, weil es nur durch Vernullung seiner dritten Dimension dx, ein $3x^2\,o = o$ geworden ist.

---

der Endgränze seyn dürfte, da dieser letztere weniger Dimensionen als die Function hat, auf welche man zurück schliefsen will. Einige der dort mit beizubringenden Vorstellungen, obgleich zum strengern Erweise der Integralmethode nicht nothwendig, werden gleichwohl ihrer rathsamen Anschaulichkeit wegen der noch nicht völlig $= o$ gewordenen $'dx$ sich bedienen.

Dagegen sind nun die Quotienten,

sowohl $\frac{\Delta . x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$

als $\frac{'d . x^3}{'dx} = 3x^2 + 3x'dx + 'dx^2$

und $\frac{d . x^3}{dx} = 3x^2$ offenbar nur Gröfsen von 2 Dimensionen; in diesem geometrischen Beispiele also Flächen; wie es auch eine perspectivische Zeichnung mit werdenden Differentialen vor Augen legen könnte.

§. 3. Noch bequemer für graphische Darstellung ist das Beispiel $X = xx$, da denn der werdende Differentialquotient $\frac{'d . x^2}{'dx} = 2x + dx$ auch in der Figur 5. als die Liniensumme $x + x + 'dx = MN$ vor Augen steht; und den genauen Differentialquotienten $\frac{dX}{dx} = 2x$ als die Liniensumme $x + x$ übrig läfst, welche nun offenbar die, wegen der beiden veränderlichen x, veränderlichen Endgränzen der Function $X = xx$ ausmacht.

Das werdende Differential $'d . x^2 = 2x'dx + 'dx'dx$ ist aufser dem Quadrate $'dx'dx$ zweimal das Parallelogramm $x'dx$ enthaltend.

Das genaue Differential $d . x^2 = 2x\,dx$ ist nur als Flächenraum, wegen seiner $dx = 0$ gewordenen Dimension, allerdings $= 0$ geworden; seine zweite Dimension $2x$ bleibt vorhanden, und macht den genauen von dx unabhängigen Werth des Differentialquotienten, also die mit den beiden x veränderlichen Endgränzen der Function aus.

§. 4. Im Rechtecke $X = ax$ (Fig. 6.) macht das werdende Differential $'dX = a'dx$ einen Zuwachs des Rechteckes an derjenigen Seitenlinie a aus, welche die mit x veränderliche Endgränze des Rechteckes abgiebt. Ob-

gleich hier der werdende Differentialquotient $\frac{'dX}{'dx} = a$ schon mit dem genauen $\frac{dX}{dx} = a$ völlig einerlei zu seyn scheint, so ist doch die Lage dieser Linie a, nur in dem letztern genauen Differentialquotienten wirklich mit der veränderlichen Endgränze des Parallelogrammes zusammenfallend; welche Lage auch im genauen Differential $dX = a\,dx$ eben dadurch bestimmt wird, dafs der anfänglich dem Parallelogramme zugekommene kleine Wachsthum $'dX = a'dx$ mit dem kleiner und kleiner werdenden $'dx$ zum $dX = a.dx = a.o$ geworden ist.

§. 5. Ist $U = x.y$ ein Rechteck von zwei veränderlichen Dimensionen x und y, so würde es in Hinsicht des x den Differentialquotienten $\frac{^x dU}{dx} = y$, in Hinsicht des y den Differentialquotienten $\frac{^y dU}{dy} = x$ geben. Mögen auch beide Urdifferentiale gänzlich von einander unabhängig bleiben sollen, so mufs doch von beiden verlangt werden, dafs sie beide $= o$ geworden seyn sollen, um das genaue Gesammtdifferential $dU = y\,dx + x\,dy = (y+x).o$ zu geben, dessen Factor $y+x$ die beiden, wegen des veränderlichen x und y, veränderlichen Endgränzen des Rechteckes xy angiebt.

§. 6. I. Im Parallelepipedo axx, die einzelne x als Grundgröfse angenommen, hat man $\frac{'d.axx}{'dx} = a.2x + a'dx$ als den werdenden, und $\frac{d.axx}{dx} = a.2x$ als den gewordenen, genauen Differentialquotienten. Jeder ist nur eine Flächengröfse, und der letztere macht die mit den beiden x veränderlichen Endgränzen der Function aus, welche auch im genauen Differential $d.axx = 2.ax.dx$ neben $dx = o$ noch als Factor vorkommen.

II. Im Parallelepipedo axx die ganze Grundfläche xx als Grundgröfse der Function axx angenommen, durch welche dann das Functionsdifferential dividirt werden mufs, um den Differentialquotienten zu geben, würde $\frac{'d.\,axx}{'d.\,xx} = \frac{a.\,2x'dx + a'dx'dx}{2x'dx}$ $= a + \frac{a}{2x}'dx$ als den werdenden Differentialquotienten geben, der aus den beiden Linien a und $\frac{a}{2x}'dx$ besteht; indem die immerfort kleiner werdende Linie $'dx$ durch die Linie x' dividirt, nur eine immerfort kleiner werdende Zahl gibt, (oder im $\frac{a}{2x}'dx$ der andere Factor $\frac{a}{2x}$ nur eine Zahl seyn kann, wenn $'dx$ als eine immerfort kleinere Linie soll betrachtet bleiben).

Im genauen Differentialquotienten $\frac{d.\,ax^2}{d.\,x^2} = a$ ist durch $dx = o$ die Zahl $\frac{dx}{x} = o$ geworden (für alle Werthe des x, auch für $x = o$; Vorerinner. IX).

Jeder Quotient, sowohl der werdende als der genaue ist also hier eine lineäre Gröfse, eine Gröfse von einer Dimension, indem das Differential der hier angenommenen Grundgröfse x^2, wie diese selbst, eine Gröfse von zwei Dimensionen war, die Function ax^2 aber drei Dimensionen hatte; folglich auch ihr werdendes Differential eine körperliche Gröfse von drei Dimensionen blieb, und auch das genaue Differential $d.\,ax^2 = 2ax.\,dx$ nur als solche, vermittelst ihrer dritten Dimension $dx = o$ geworden, sich vernullt.

Anmerkung 1.

§. 7. In jedem dieser Beispiele sieht man nun deutlich vor Augen, dafs der genaue Differentialquo-

tient die veränderlichen Endgränzen der Function eben deshalb genau und rein angeben muſs, weil diejenigen Dimensionen, welche in den Endgränzen als solche nicht mehr vorkommen können, schon vor ihrer Vernullung durch die Division abgesondert waren; das genaue Differential aber eben dadurch zur Endgränze wird, weil man sich diejenigen Dimensionen desselben, durch welche das werdende Differential ein immerfort kleiner werdender Endwachsthum der Function war, durch Vernullung dieser Dimensionen weggefallen denken muſs.

Anmerkung 2.

§. 8. Allerdings kann, z. B. für den Kubus xxx (der Kubus 1.1.1. als Kubikeinheit zur Messung angenommen) das Verhältniſs 1.1.1 : xxx in das dreimalige Verhältniſs der beiden Linien 1 : x zerlegt, und nach folgenden Proportionen

$$1 : x = 1 : x$$
$$1 : x = x : y$$
$$1 : x = y : z$$

die Linie $y = \frac{xx}{1}$ und die Linie $z = \frac{xy}{1} = \frac{xxx}{1.1} = \frac{xxx}{1.1.1}.1$ gefunden werden. Solche $y = \frac{xx}{1.1}$ können als Ordinaten gebraucht werden, um das Steigen und Fallen der Function xx durch eine ebene Curve dargestellt zu erhalten; und eben so würde man der $z = \frac{xxx}{1.1.1}.1$ nöthig haben, um dergleichen Curve für x^3 zu zeichnen.

Es kann auch sonst noch mancherlei Nutzen bringen, wenn man sich bei manchen Functionen auseinander setzt, wie sie durch Zerlegung und Zusammensetzung linearer Verhältnisse können dargestellt werden.

Was aber die Schlüsse aus dem Differential auf den Differentialquotienten und umgekehrt betrifft; so ist es gerade die Vorstellung ihrer nothwendigen Dimensionen-Verschiedenheit, welche hier die gröfste Deutlichkeit und Ueberzeugung unmittelbar gewährt; daher man selbst auch bei einer solchen Function, welche als Linie betrachtet wird, in Hinsicht dieser Schlüsse am besten thut, sie lieber als ein Zahlenproduct ausgedrückt, und diejenige Function, durch deren Differential das Differential der Function, um den Differentialquotienten zu geben, zu dividiren ist, als einen Factor jenes Productes sich vorzustellen; und vermöge der in Vorerinner. VI. beigebrachten arithmetischen Dimensionen sich auszudrücken.

Anmerkung 3.

§. 9. Absichtlich habe ich hier lauter solche Beispiele gewählt, in welchen die Endgränze p nicht nur dem $dx = o$ geworden, wie allemal, vollständig, sondern auch schon dem x vollständig dimensorisch war, welches bei den wenigsten Functionen der Fall ist. Gerade die Beachtung dieser Unvollständigkeit wird uns für das Integriren neue und nützliche Lehren ergeben, wenn wir dem dortigen Zwecke gemäfs die veränderlichen Endgränzen betrachten und benutzen werden.

Fünftes Capitel.

Hypothetisch allgemeine Differenziirungs-Lehren für jede Function von x.

§. 1. Wenn jedes belegte X, das heifst, jede Function des x, in welcher man $x + \Delta x$ statt ihres x geschrieben hat, ein $X^1 = X + p\Delta x + Q\Delta x^2 + R.\Delta x^3 + S\Delta x^4 \ldots$ folglich jedes $\Delta X = p.\Delta x + Q.\Delta x^2 + R.\Delta x^3 + S.\Delta x^4 \ldots$ ist, das heifst, jedes ΔX einer Reihe dieser Form unterworfen ist, in welcher die Coefficienten p, Q, R etc. allerlei Functionen auch Scheinfunctionen von x sind, es mögen derselben unendlich viele auf einander folgen, oder auch früher oder später schon sich $= o$ ergeben, und somit die Reihe abgebrochen haben: so mufs eben so allgemein der Differenzquotient $\frac{\Delta X}{\Delta x} = p + Q\Delta x + R\Delta x^2 + S.\Delta x^3$ etc. also der werdende Differentialquotient $\frac{'dX}{'dx} = p + Q.'dx + R'dx^2 + S'dx^3$ etc., folglich der genaue noch formenvollständige Differentialquotient $\frac{dX}{dx} = p + Q\,dx + R\,dx^2 + S\,dx^3$ etc, und demnach der schlechthin so genannte Differentialquotient $\frac{dX}{dx} = p$ seyn.

§. 2. Denn unter dem schlechthin so genannten Differentialquotienten wird derjenige Ausdruck desselben verstanden, welcher für den genauen Differentialquotienten die Gröfse desselben genau angibt; und diese mufs ganz genau $= p$ seyn, weil selbst auch, wenn die x-Functionen Q oder R u. s. w. für einige Werthe ihrer x als ein vollendetes Unendlich-

grofs sich ergeben sollten, (z. B. $\frac{a}{x^n}$ für $x=o$; $\frac{a}{(a-x)^2}$ für $x=a$, oder $\frac{a}{(a+x)(b-x)}$ für $x=a$, und $x=b$) dennoch sie kein solches ∞ ausmachen, welches mit $dx=o$ geworden, multiplicirt etwas anders als o zum Producte geben könnte. (Man sehe Vorerinner. IX. 9; 10).

§. 3. Indem wir hiermit überzeugt sind, dafs allemal, selbst auch bei unendlich grofsen Werthen des Q, R, S etc., ausgemacht $Q\,dx = Q.o = o$; $R\,dx = R.o = o$; $S\,dx = S.o = o$ geworden seyn mufs: so haben wir ja

$$\frac{dX}{dx} = p + Q\,dx + dx.\,R\,dx + dx^2\,S\,dx \text{ etc.}$$

$$\text{also} = p + o + o.\,o + o.\,o \text{ etc.}$$

$$\text{also} = p \text{ und weiter nichts.}$$

§. 4. Aus $\frac{dX}{dx} = p$, als der ganz genauen Gröfse des Differentialquotienten, folgt, dafs $dX = p.\,dx$, also dieses p.o, dieses pmal Nichts, die genaue Gröfse des Functionsdifferentiales dX seyn mufs; und Anfänger werden wohl thun, zuvörderst auf die Bestimmung des Differentialquotienten ihr Augenmerk zu richten, welcher übrigens bald als eine constante, bald als eine variable Gröfse, auch für einige Fälle sich $=o$ oder auch vollendet grofs ∞ sich ergeben kann.

§. 5. Allerdings aber kann man auch ohne Differenz- und Differentialquotienten unmittelbar aus der endlichen Differenz $\triangle X$ auf das werdende Differential dX, aus diesem auf das noch formenvollständige genaue dX, und aus demselben auf das nur noch gröfsenvollständige genaue, schlechthin so genannte Differential dX schliefsen.

Denn aus $\triangle X = p\triangle x + Q\triangle x^2 + R\triangle x^3 + S\triangle x^4 \ldots$
folgt $'dx = p'dx + Q'dx^2 + R'dx^3 + S'dx^4 \ldots$
also auch $dX = p\,dx + Q\,dx^2 + R\,dx^3 + S\,dx^4 \ldots$
und $dX = (p + Qdx + dx.\,Rdx^2 + Sdx^3 + \ldots)\,dx$
als $= (p + o + o \,.\, o + o.\,o. \quad + \text{etc.}).\,o$
$= p.o$

wodurch es ebenfalls völlig einleuchtet, dafs die Gröfse der Parenthese ganz genau bestimmt ist, und die Gröfse des dX lediglich darin bestehen kann, dafs sie eine pmalige o ist.

§. 6. Was es uns nützen könne zu wissen, dafs die $dX = o$ gerade eine pmalige o ausmacht, davon braucht in der Differentialrechnung nicht nothwendig die Rede zu seyn; weil alle ihre Resultate dadurch abgeschlossen werden können, dafs jedes $\frac{dX}{dx} = p$ eine $\frac{o}{o} = p$ ist; daher man auch, wo man während derselben dennoch $dX = pdx$ etwa geschrieben findet, dieses nur als eine bequem zu schreibende Gleichung betrachten kann, aus welcher sich $\frac{dX}{dx} = p$ sogleich herstellen läfst. Indessen kommen auch Fälle vor, wo die Ueberzeugung von der Richtigkeit und Schicklichkeit des Resultates an Anschaulichkeit dadurch gewinnt, dafs man sich die Differentiale der urbelegten Gröfsen und ihrer Function noch in ihrem Verschwinden zu denken sucht.

Auch mufs man die Frage nach der Gröfse des Functionsdifferentials dadurch herzhaft zu beantworten wissen, dafs sie eine pmalige o ist.

§. 7. Wenn man zwischen der Benutzung des $\frac{dX}{dx} = p$ in der Differentialrechnung, und der Benutzung des p vermittelst der Form $dX = pdx$ in der In-

tegralrechnung nicht gehörig unterscheidet, ohne deutliche Darstellung des Differentialquotienten und der ihm eigenthümlichen Benutzung, immer nur die Differentialform $dX = p\,dx + Q\,dx^2 + R\,dx^3 + S\,dx^4$ etc. vor Augen hat: so ist es sehr natürlich, dafs dieses dX, wenn $dx = o$ geworden seyn soll, als ein nichts bestimmendes Aggregat von Nullen erscheint, und man daher für nöthig hält, das dx niemals völlig $= o$ geworden, sondern nur unendlich klein, dem o ohn Ende sich nähernd zu fordern. Demnach hat man es bei diesem Lehrvortrage nie mit dem von uns so genannten genauen Differential, sondern immerfort nur mit dem von uns so genannten werdenden $'dX = p'dx + Q'dx^2 + R'dx^3 +$ etc. zu thun; dessen Urdifferential immer nur ein immerfort kleiner werdendes $'dx = \frac{x^o}{\infty}$ bleibt, und niemals ein $= \frac{x^o}{\infty} = o$ gewordenes dx ist, wenn wir zwischen ∞ und ∞ auch hier, wie in Vorerinner. VII. unterscheiden.

Vom relativen Verschwinden.

§. 8. Da dann $p'dx : Q.'dx^2 = p : Q\,dx$, folglich auch $p'dx : p'dx + Q'dx^2 = p : p + Q'dx = 1 : 1 + \frac{Q}{p}'dx$ ist; auch eben so $Q'dx^2 : R'dx^3 = Q : R'dx$, folglich auch $Q'dx^2 : Q'dx^2 + R'dx^3 = Q : Q + R'dx = 1 : 1 + \frac{R}{Q}'dx$ ist; so sagt man, dafs sich das Verhältnifs, Summe aus erstem und zweiten Gliede zum ersten Gliede, und eben so das Verhältnifs, Summe aus zweitem und dritten Gliede zum zweiten Gliede, ohn Ende dem Verhältnifs 1 : 1, dem Verhältnisse der Gleichheit nähert; folglich das zweite Glied, als verschwindend gegen das erste, neben dem ersten wegfallend sey, neben dem zweiten aber eben so das

dritte schon verschwindend, und daher die Abgleichung $'dX = p'dx$ nur einem unendlich kleinen Fehler unterworfen sey; der nun auch eine noch so kleine Gröfse, so lange sie gröfser als o angegeben würde, nicht betragen könne.

§. 9. Da auf diese Weise die unendliche Kleinheit des Fehlers durch die obigen Proportionen erwiesen seyn soll, so kann sie nur verhältnifsmäfsig zu verstehen seyn, und nöthigt uns, auch auf die Gröfse des Gliedes zu achten, neben welchem ein anderes soll weggelassen werden, indem wir überzeugt seyn müssen, dafs das wegzustreichende in Vergleich mit dem stehen bleibenden etwas unendlich kleines sey. Wo nun aber der Coefficient p noch eine Function von x ist, die also für einen oder auch mehre Werthe ihres x sich als eine $p = o$ ergeben kann, für diese Werthe des x also auch $p'dx = o$. $'dx = o$ seyn mufs: da würde man nun entweder behaupten müssen, dafs auch gegen diese schon wirklich vorhandene o, das noch in seiner unendlichen Annäherung an $= o$ begriffene, $Q'dx'dx$ dennoch unendlich klein sey, oder man müfste behaupten, dafs in diesen Fällen $'dX = Q'dx'dx$ zu beachten sey! Der ganze Beweisgang in §. 4. würde uns zu der letzten Behauptung verleiten, die wir aber späterhin für unschicklich anerkennen müfsten, sobald wir zwischen dem ersten Differential dX und dem zweiten Differentiale $ddX = \frac{1}{2}Q\,dx\,dx$ gehörig unterscheiden gelernt hätten. Demnach müfste man zu erweisen suchen, dafs gegen eine solche o, als $p'dx = o$. $'dx$ seyn kann, das dem o unendlich sich nähernde $Q'dx'dx$ immer noch wie $1 : \frac{1}{\infty}$ sich verhalte. Dieser Beweis dürfte doch schwierig und unangenehm denen Mathemati-

kern fallen, welche, um nicht mit einem $dx = o$ zu thun zu haben, nur ein 'dx dem o unendlich sich nähernd gestatten wollen!

Wir brauchen uns um diesen mühsamen Beweis nicht zu bekümmern, da wir aus §. 3 und 4. es wissen, dafs allemal $dX = (p + o + o \text{ etc.})\, dx$, also auch für $p = o$ ganz genau $dX = o.\, dx$ seyn mufs.

§. 10. Obgleich wir allerdings von vorne her schon allgemein es wissen, dafs mit dem Urdifferential $dx = o$ geworden, auch jedes Folgedifferential $dX = o$ geworden seyn mufs, weil ja, sobald die Gröfse der Ursache vernullt ist, auch die Gröfse der Wirkung sich vernullt haben mufs: so würden wir doch dabei immer noch ungewifs bleiben können, ob auch $p\,dx$ für sich allein schon $= o$ geworden seyn müsse, wenn wir nicht in Vorerinner. IX. es erwiesen hätten, dafs in dem noch formenvollen genauen Differentiale $dX = p\,dx + Q\,dx^2 + R\,dx^3 \ldots$) jedes Glied für sich allein auch $= o$ geworden seyn müsse. Denn ohne diesen Beweis würde ja die Möglichkeit übrig bleiben, dafs dX als algebraische Summe aus mehren, sehr oft auch unendlich vielen Gliedern, allerdings $= o$ seyn könne, obgleich einige der Glieder, namentlich auch $p\,dx$ für sich allein genommen, bei solchen Werthen des x, wodurch $p = \infty$ sich ergiebt, eine endliche Gröfse geworden seyn könnte!

§. 11. Nur hypothetisch allgemeine Lehren habe ich in der Ueberschrift dieses Capitels versprochen; denn nach dem hier befolgten Vortrage bleibt ihre wirkliche Allgemeinheit uns ungewifs, so lange es uns ungewifs ist, ob jede algebraische oder auch nicht algebraische Function eine der Form $p\,\triangle x + Q\,\triangle x^2 + R\,\triangle x^3$ etc. unterworfene, oder doch unterwerfbare allgemeine Differenz $\triangle X$ habe. Gesetzt auch, dafs dieses schon im Anfange der Wissenschaft befrie-

digend könnte erwiesen werden, woran ich nicht nur nach allen mir vorgekommenen Versuchen, sondern auch von vorne her zweifeln mufs: so würde ich doch nicht für rathsam achten, an dieser allgemeinen Form des endlichen $\triangle X$ sich zu halten. Für alle Bedürfnisse des Infinitesimal-Calculs ist es ja schon hinreichend zu wissen, dafs jedes formenvolle genaue Differential $dX = p\,dx + Q\,dx^2 + R\,dx^3$ etc. nämlich jedes dX dieser Form unterwerfbar sey; und diese Allgemeinheit wird leichter zu erweisen seyn, weil diese Form des genauen Differentials auch aus solchen $\triangle X$ folgt, welche dieser Form noch nicht unterworfen sind, und oftmals ohne viele Mühe ihr nicht zu unterwerfen seyn würde.

So gewifs es ist, dafs man aus jedem dX dieser Form auch auf ein $'dX = p'dx + Q'dx^2 + R'dx +$ etc. und hieraus auf ein $\triangle x = p\triangle x + Q\triangle x^2 + R\triangle x +$ etc. zurück schliefsen könne; so würde man doch unrecht meinen, dafs es nicht noch anders geformte $\triangle X$ und $'dX$ für dieselbe Function X geben könne. Diese andere Formen können vielmehr in anderer Hinsicht rathsamer, auch leichter zu finden seyn, ohne sich für die Auffindung des genauen Differentials weniger bequem zu erweisen.

Anfängern möchte ich rathen, in Hinsicht der aufgestellten allgemeinen Form nur auf das formenvolle genaue Differential zu achten; nämlich, indem sie nach und nach immer mehr und mehr Functionen X differenziiren lernen, sich zu überzeugen, dafs jedes aufgefundene dX der obigen Form unterworfen sey.

Späterhin werden wir dann die Allgemeinheit dieser Form bündig zu erweisen suchen.

§. 12. Für geübte Leser, welche aufser dem ersten Differentialquotienten $\frac{dX}{dx} = p$, auch mit dem

höheren, zweiten, dritten u. s. w. $\frac{ddX}{dx^2} = q$; $\frac{dddX}{dx^3} = r$, u. s. w. schon bekannt sind, will ich noch folgendes mittheilen.

Späterhin wird es erwiesen werden, dafs jedes Differential $dX = pdx + \frac{1}{2} q dx^2 + \frac{1}{2.3} r dx^3 + \frac{1}{2.3.4} S dx^4 +$ etc. ist.

Euler, der auch um diesen Theil des höhern Calculs, ungemeine Verdienste hat, nennt diese Reihe das vollständige Differential; und meines Wissens sind auch alle Mathematiker nach ihm in der Meinung geblieben, dafs der Abgleichung $dX = pdx$, also auch den $\frac{dX}{dx} = p$, nicht allgemein zu trauen sey; weil in solchen Fällen da q oder r, u.s.w. sich unendlich grofs ergiebt, auch von diesen Gliedern her etwas hinzukommen könnte. Da wir uns dieser Besorgnifs völlig entledigt haben (§. 2); so wissen wir, dafs durch $dX = pdx$ allein schon die Gröfse des ersten Differentials allemal völlig genau angegeben wird. In Hinsicht der Gröfse dieses ersten Differentials kann also etwas vollständigeres nicht vorhanden seyn; und eben desselben werden wir aus denselben Gründen auch für die Abgleichung des zweiten und dritten Differentials $ddX = Qdx^2$; $d^3X = Rdx^3$ u. s. w. uns versichern können.

Obgleich in der Reihe $dX = pdx + \frac{1}{2} qdx^2 + \frac{1}{2.3} rdx^3 +$ u. s. w. die zweiten und dritten Differentialquotienten etc. $q = \frac{ddX}{dx^2}$ und $r = \frac{dddX}{dx^3}$ u. s. w. mit vorkommen; so ist doch daraus nicht zu schliefsen, dafs ihr dX auch auf diese höheren Differentiale sich mit erstrecke; sondern die Auffindung dieser Differentialquotienten ist das leichteste und bequemste Mittel, die Gröfse der Coefficienten $Q = \frac{q}{2}$; $R = \frac{r}{2.3}$ zu finden, von welchen die vollständige Form des ersten Differentiales dX abhängig ist, aus welcher dann sogleich auch auf die vollständige Form der ersten Differenz $\triangle X = p\triangle x + Q\triangle x^2 + R\triangle x^3 +$ etc. kann geschlossen werden, auch für die Fälle, in welchen $p = o$ ist, die voll-

ständige Form des zweiten Differentiales ddX sehr leicht kann geschlossen werden.

Lagrange, der durch seinen Functionencalcul die Lehren der Infinitesinalrechnung strenger und zuverlässiger als durch Betrachtung der Infinitesimalien zu erweisen wähnte, hat nicht nur diesen Irrthum der vor ihm gewöhnlichen Infinetesimal-Methode in die Lehren seines Functionencalculs mit übertragen, sondern auch durch einen eigenthümlichen Beweis für diesen Irthum ihn aufs neue autorisirt! M. s. meinen Aufsatz: Die von Euler, Lagrange, Lacroix u. s. w. behauptete Trüglichkeit gewisser Differentialen, Differentialquotienten und *fonctions derivées*, findet nicht Statt, und die von ihnen aufgefundenen Formen sind die unrichtigen; als Anhang zu der Abhandlung: *Formulae radii osculatoris etc.* Dresden bei Arnold 1825.

Sechstes Capitel.

Regeln zur bequemen Differenziirung der algebraischen Functionen.

§. 1. Unter allen X, unter allen Functionen des x, ist die $X = x^n$, als eine beliebig doch bestimmt gegebne, unveränderliche nte Potenz einer veränderlichen Stammgröfse x, der ersten und vorzüglichsten Beachtung werth. Wird ihr x mit der allgemeinen Differenz $\triangle x$ belegt, so mufs die belegte Function $X^1 = (x + \triangle x)^n$ zufolge der ersten Binomialreihe (Vorerinner. V.)

als ein $X^1 = x^n + n x^{n-1} \triangle x + \frac{n.n-1.}{1.2} x^{n-2} \triangle x^2 + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} x^{n-3} \triangle x^3 + \ldots\ldots$

also $\triangle . x^n = n x^{n-1} \triangle x + \frac{n.n-1.}{1.2} x^{n-2} \triangle x^2 + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3.} x^{n-3} \triangle x^3 + \ldots\ldots$

folglich $\frac{\triangle . x^n}{\triangle x} = n x^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} x^{n-2} \triangle x + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} x^{n-3} \triangle x^2 + \ldots$ als allgemeiner Differenzenquotient, und demnach (II. §. 8.) $\frac{'d.x^n}{'dx} = n x^{n-1} + \frac{n.n-1.}{1.2} . x^{n-1} 'dx + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} . x^{n-2} 'dx^2 \ldots$ als ihr noch werdender, noch im Werden begriffener Differenzialquotient sich ergeben.

Unter dem schlechthin geschriebenen dx nunmehr ein wirklich $= o$ gewordenes Differential verstanden, hat man

$\frac{d.x^n}{dx} = n x^{n-1} + \frac{n.n-1.}{1.2} x^{n-2} dx + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} . x^{n-3} dx^3 + \ldots\ldots$ als den noch formenvollständigen genauen Differentialquotienten. Jedes Glied, dessen Gröfse mit $dx = o$ sich vernullt, völlig weggelassen, hat man $\frac{d.x^n}{dx} = n x^{n-1}$ als den Gröfsenwerth des genauen Differentialquotienten, welcher nun auch schlechthin der Differentialquotient genannt wird.

§. 2. Nach Vorerinner. V. §. 2. vorausgesetzt, dafs das Binomialtheorem in seiner ganzen Allgemeinheit, nämlich für jedes n, es mag eine bejahte oder verneinte, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale, auch unmögliche Gröfse seyn, schon vor dem Angriffe des Infinitesimalcalculs durch endliche Analyse erwiesen sey, sind wir nunmehr schon gewifs, dafs der Differentialquotient $\frac{d.x^n}{dx} = n x^{n-1}$ eben so allgemein gültig ist.

§. 3. Da alle Resultate der Infinitesimalrechnung, welche durch die Differenzialrechnung allein, ohne hinzukommende Integrierung, abgeschlossen werden, am deutlichsten durch die Gröfse des genauen Differentialquotienten sich ergeben, bei diesem aber den Anfängern, welche bisher nur mit der Analysis endlicher Gröfsen zu thun hatten, die Bestimmung seiner endlichen Gröfse deutlicher, als die Bestimmung des Differentials $d.x^n = nx^{n-1}dx = nx^{n-1}.0$ einleuchtet: so mögen solche Anfänger allerdings bei dem Differenziiren einer Function ihr erstes Augenmerk auf die Bestimmung des Differentialquotienten richten; dessen Gröfsenwerth im allgemeinen p genannt, doch allemal eine Function oder Scheinfunction von x ist, im letzten Falle eine von x abhängige, also in so fern constante Gröfse ist, im erstern Falle doch nur für einige Werthe des x sich $=0$ auch bisweilen $=\infty$ ergibt.

§. 4. Wer nun für die vorhin behandelte Function x^n zuvörderst den Differentialquotienten $\frac{d.x^n}{dx} = nx^{n-1}$ gefunden hat, wird aus dieser ganz genauen Gröfse schliefsen können, dafs auch $d.x^n = nx^{n-1}dx$ eine ganz genaue Bestimmung des $d.x^n$ ausmachen mufs; nämlich eben so, wie die ganz genaue Gröfsenbestimmung des $\frac{d.x^n}{dx}$ durch $dx=0$ geworden gefunden ist, auch die ganz genaue Bestimmung des $d.x^n = 0$ lediglich darin bestehen kann, dafs sie eine nx^{n-1} malige 0 ist.

§. 5. Da wir aber späterhin einsehen werden, dafs für die anschaulichste und angemessenste Benutzung der Infinitesimalmethode (namentlich auf angewandte Mathematik) die Aushebung des Differentialquotienten meistens einen ganz unnöthigen (und sehr

undeutlicheu) Umweg ausmacht: so ist es etwas werth, dafs wir nach unserm Lehrvortrage auch aus dem formenvollständigen genauen Differential unmittelbar auf dessen Gröfse, auf das schlechthin so genannte Differential mit völligster Schärfe und Deutlichheit zu schliefsen wissen.

Denn, wenn in dem formenvollständigen dX zwei auf einander folgende Glieder $N\,dx^n$ und $M\,dx^{n+1}$ sind, so mufs, M mag seyn, welche Function von x es will, allemal $N\,dx^n + M\,dx^{n+1} = (N + M\,dx).\,dx^n = (N+o).\,dx^n = N.dx^n$ seyn; kann also in dem formenvollständigen $dX = p\,dx + Q\,dx^2 + R\,dx^3 \ldots.$, $N dx^n + M\,dx^{n+1} \ldots.$ jedes Glied, bei seiner Summirung mit dem vorhergehenden Gliede, weggestrichen werden, bis man zu dem ersen Gliede pdx gekommen ist, welches wir, obgleich es, wegen seines $dx = o$ geworden, ebenfalls, wie das ganze dX eine völlige o ist, dennoch beibehalten müssen; für die Integralrechnung, weil wir dort aus der Form dieses Gliedes auf die Form der Function X zu schliefsen suchen; für die Differentialrechnung aber, weil aus $dX = pdx$ auch $\frac{dX}{dx} = p$ folgt.

§. 6. Unsere Forderung, dafs das Urdifferential dx, und daher auch das Folgedifferential dX ein völlig $= o$ gewordenes dx und dX seyn soll, haben wir es zu verdanken, dafs der Schlufs aus dem genauen Formendifferential

$$dX = p\,dx + Q\,dx^2 + R\,dx^3 \ldots.$$
$$= (p + Q\,dx + R\,dx^2)\,dx \ldots.$$

auf $dX = p\,dx$, eben so völlig befriedigend ist als der Schlufs

$$\text{aus } \frac{dX}{dx} = p + Q\,dx + R\,dx^2$$
$$\text{auf } \frac{dX}{dx} = p.$$

§. 7. Wenn wir zur Entwickelung des $X' = (x+\triangle x)^n$ statt der ersten in §. 1. befolgten Binomialreihe uns der zweiten (Vorerinner. V. §. 5.) bedienen, so erhalten wir

$$\triangle X = nx^n \frac{\triangle x}{x+\triangle x} + \frac{n.n+1.}{1.2} x^n \left(\frac{\triangle x}{x+\triangle x}\right)^2 + \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3} x^n \left(\frac{\triangle x}{x+\triangle x}\right)^3 + \ldots\ldots$$

$$\text{also } {}'dX = nx^n \frac{'dx}{x+'dx} + \frac{n.n+1.}{1.2} x^n \left(\frac{'dx}{x+'dx}\right)^2 + \frac{n.n+1.n+2.}{1.2.3.} x^n \left(\frac{'dx}{x+'dx}\right)^3 + \ldots\ldots$$

$$\text{folglich } dX = nx^{n-1}\,dx + \frac{n.n+1.}{1.2} x^{n-2}\,dx^2 \frac{n.n+1.n+2.}{1.2.3} x^{n-3}\,dx^3 + \ldots\ldots$$

weil ja mit $'dx = dx = o$ auch $x + 'dx = x + dx = x$ geworden seyn muſs;

daher $dX = nx^{n-1}\,dx$, *wie vorhin.*

Lediglich das schlechthin so genannte Differential dX, nicht auch das formenvóllständige dX, ist mit dem vorhin gefundenen einerlei; welches in der Integralrechnung die Frage veranlassen könnte, ob vielleicht vermittelst dieser zweiten Form einige Functionen, die man bisher nur näherungsweise zu behandeln vermochte genau integrirt werden könnten! Da wir aber in der Integralrechnung lediglich aus der, im genauen Gröſsendifferentiale dX übrig gebliebenen Form zu schlieſsen uns deutlich bewuſst seyn werden, und diese einerlei sich ergiebt, wir mögen uns der ersten oder der zweiten Binomialreihe bedient haben: so können und wollen wir der Gewohnheit getreu bleiben, und zur fernerhin folgenden Entwickelung der Differenziirungsregeln allemal die erste Binomialreihe voraussetzen. Zur Bestätigung

dessen, was wir in V. §. 11. behauptet haben, wollen wir nur noch bemerken, dafs die zweite Binomialreihe ein $\triangle.x^n$ gegeben hat, welches, so wie es dasteht, der in V. §. 1. hypothetisch aufgeführten allgemeinen Form $\triangle X = p\triangle x + Q\triangle x^2 + R\triangle x^3 + \ldots$ noch nicht unterworfen ist.

§. 7. Die erste Binomialreihe giebt uns

$$d.x^n = nx^{n-1}\,dx + \frac{n.n-1.}{1.2}\,x^{n-2}\,dx^2 + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}\,x^{n-3}\,dx^3 \ldots.$$

der Form $dx = p\,dx + Q\,dx^2 + R\,dx^3 + S\,dx^4 + \ldots$ dergestalt unterworfen, dafs jeder der Coefficienten P, Q, R, ... aufser seinem numerischen Factor einen dimensorischen x^{n-1}; x^{n-2}; x^{n-3}; ... in sich hat, welcher mit seinem dx; dx^2; dx^3 multiplicirt, für jedes Glied die n Dimensionen herstellen mufs; wodurch die sämmtlichen Glieder dimensorisch gleichartig und dadurch additiv bleiben. Die numerischen Factoren, (die man häufig auch numerische Coefficienten genannt findet)

$$n;\ \frac{n.n-1.}{1.2};\ \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3};\ \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4};\ \text{etc. pflegt}$$

man durch $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{D}$; etc. der Kürze wegen anzudeuten.

Wenn die dimensorisch gleichartigen Gröfsen mehrer Glieder nach einerlei Einheit ausgedrückt wirklich summirt werden sollen, so mufs es durch Summirung der $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. geschehen, die man sich daher als Zahlen zu denken, und daher mit Recht numerisch genannt hat, obgleich es bei der so allgemeinen Bedeutung des n im allgemeinen binomischen Lehrsatze oft sehr schwierig fallen würde, ihre Zahlgröfse auch nur Näherungsweise auszudrücken, und überhaupt der wirkliche Zahlenausdruck im allgemeinen Summiren entbehrlich bleibt.

§. 8. Zwischen den urbelegten, ursprünglich mit einem Differential belegten, und den folglich belegten veränderlichen Gröfsen, haben wir durch den bisherigen Vortrag in so fern schon unterscheiden gelernt, als wir uns jedes $\triangle X$ der Function X durch die Belegung $\triangle x$ ihrer Grundgröfse bewirkt gedacht haben; und dieses wird hinreichend seyn, auch andere nicht so einfach von einander abhängige Belegtheiten verständlich zu erklären.

§. 9. Wo ich mich der grofsen Buchstaben X, Y und Z bediene, sollen darunter Functionen des x, y und z fernerhin, und in diesem Capitel algebraische verstanden werden. Bei einigen Sätzen ist es rathsam, Anfänger durch solche grofse Buchstaben in der Kürze erinnert zu wissen, dafs sie sich so eben schon Functionen von veränderlichen und verschiedenen Grundgröfsen vorstellen sollen. Alles, was sie dann für diese Functionen als bündig erwiesen anerkannt haben, mufs sich ihnen eben deshalb auch für die Grundgröfse erwiesen darstellen, weil ja jede Grundgröfse x als 1.x betrachtet, sogleich auch eine Function des x ist. Uebrigens aber wird schon der dritte Lehrsatz zeigen, dafs ich zu rechter Zeit auch an den Gebrauch der kleinen Buchstaben zu gewöhnen suche, wo die Sätze ohne besondere Rücksicht auf ursprüngliche oder abhändige Belegtheit ausgesprochen werden, und in jeder Belegtheit als solcher begründet sind.

§. 10. Die folgenden fünf Lehrsätze werden nun zur bequemen und sicheren Differenziirung aller algebraischen Functionen hinreichend seyn, wenn wir für einige Fälle allerdings auch schickliche Substitutionen zu Hülfe nehmen. Ungemein viele, gewöhnlich durch Substitutionen abgereichte Differenziirungen werden indessen durch unsere Erweiterun-

gen des ersten Lehrsatzes (§. 17. u. 51.) unmittelbar, und eben dadurch deutlicher und sicherer abgethan seyn.

Erster Lehrsatz.

§. 11. Es ist $d.x^n = nx^{n-1}\,dx$, und eben deshalb auch $d.ax^n = nax^{n-1}\,dx$, wenn der Factor a eine beständige Gröfse, oder doch eine solche veränderliche Gröfse ist, die kein x, auch keine mit x veränderliche Gröfse enthält. Nämlich: das Differential einer nten Potenz mit unveränderlichem n und veränderlicher Stammgröfse x, ist das Product aus dem Exponenten n, und x hoch n — 1, und dx, dem Differentiale der Stammgröfse; und durch einen constanten, oder doch vom x unabhängigen Factor a der Function x^n wird auch ihr Differential multiplicirt.

Beweis.

§. 12. Für $X = x^n$ ist der Satz schon in §. 1. erwiesen; daher hier nur noch darzulegen ist, wie derselbe Beweis auch für $X = ax^n$ gilt. Dieser Function belegte Gröfse ist

$$X^1 = a(x + dx)^n = a\left(x^n + nx^{n-1}\,dx + \frac{n.n-1.}{1.2}x^{n-2}\,dx^2 + \ldots\ldots\right)$$

also $dX = a\left(nx^{n-1}\,dx + \frac{n.n-1.}{1.2}x^{n-2}dx^2 + \ldots\ldots\right)$

also $\frac{dX}{dx} = anx^{n-1}$, mit $dx = o$ geworden,

und $dX = nax^{n-1}\,dx$; welches nicht nur aus $\frac{dX}{dx}$ sondern auch unmittelbar eben so gut aus dX kann gefolgert werden.

(Wir haben nämlich, wie man leicht durchsieht, nicht nöthig allemal so umständlich wie es in §. 1.

geschehen ist, zuvörderst $\triangle X$ hinzuschreiben, daraus auf $'dX$ zu schliefsen, und dann wiederum besonders dX hinzuschrieben; da ja die Form für $\triangle X$, $'dX$ und dX einerlei ist.)

Zusatz 1.

§. 13. Eben so würde man allerdings auch für jede Function X in den fernerhin folgenden Lehrsätzen es darlegen können, dafs durch dieselben Schlüsse, wodurch man dort ihr $dX = p\,dx$ gefunden hat, auch ihr $d.aX = ap\,dx$ sich ergeben mufs. Man wird aber auch schon durch Betrachtung des einen hier vorgelegten Beispieles sich allgemein überzeugt finden, dafs diese Folgerung eben deshalb allemal Statt finden mufs, weil ja der Factor a eine von x ganz unabhängige Gröfse ist, und indem er die x, aller ihrer veränderlichen Werthe unbeschadet, amal zu nehmen fordert, auch dessen Belegung dx ebenfalls amal zu nehmen verlangen mufs; daher überhaupt, wenn $dX = p\,dx$, das ist $d.1.X = 1.\,p\,dx$ sich ergeben hat, auch $d.aX = ap\,dx$ seyn mufs.

Zusatz 2.

§. 14. Eben so mufs, wenn der von x unabhängige Factor ein verneinter $-a$ ist, auch $d.-aX = -apdx$, namentlich also auch $d(-X) = d(-1.X) = -1.dX = -dX$ seyn.

Da nun das regelmäfsige Urdifferential dx allemal einen Zusatz zur absoluten Gröfse des x ausmacht (III. §. 30.) so hat man

$$d(-x^n) = -1.\,dx^n = -1.nx^{n-1}\,dx$$

aber $d(-x)^n = n.(-x)^{n-1}.-dx = -n(-x)^{n-1}dx$ sind also $d.-x^n$ und $d(-x)^n$ einander gleich, oder entgegengesetzt bezeichnete Gröfsen, je nachdem $n-1$

eine gerade oder ungerade Zahl, also n eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Beispiele für den ersten Lehrsatz.

§. 15. $d.x^2 = 2x\,dx$, und $dx^3 = 3x^2\,dx$

$$d\sqrt{x} = d.x^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$d\sqrt[m]{x} = d.x^{\frac{1}{m}} = \tfrac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}\,dx = \tfrac{1}{m}x^{\frac{1-m}{m}}\,dx = \frac{1}{m}\cdot\frac{dx}{x^{\frac{m-1}{m}}}$$

$$= \frac{dx}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$$

$$d.\frac{1}{x^m} = d.x^{-m} = -mx^{-m-1}dx = -\frac{m\,dx}{x^{m+1}}$$

$$d\sqrt[3]{x^4} = d.x^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}\,dx = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}.\,dx$$

$$d.\,ax^{\frac{p}{q}} = a\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}\,dx = a\frac{p}{q}x^{\frac{p-q}{q}}\,dx$$

$$d.\,ax^{-\frac{p}{q}} = -a\frac{p}{q}x^{-\frac{p}{q}-1}\,dx = -\frac{ap}{q}x^{-\left(\frac{p}{q}+1\right)}\,dx$$

$$= -\frac{ap}{q}\cdot\frac{dx}{x^{\frac{p}{q}+1}}$$

Als Beispiele zu §. 14.
hat man $d.-x^3 = d-1.x^3 = -1.dx^3 = -3x^2\,dx$
und $d(-x)^3 = 3(-x)^2.-dx = -3x^2\,dx$;
dagegen $d.-x^2 = d-1.x^2 = -2x\,dx$
und $d(-x)^2 = 2(-x).-dx = 2x\,dx$.

§. 16. Absichtlich habe ich diese Beispiele und die sämmtlichen Ausdrücke im Lehrsatze und dessen Beweise so gewählt, dafs man durchaus veranlafst gewesen ist, sich die Stammgröfse x als die urbelegte Grundgröfse zu denken, welcher das Urdifferential dx zugelegt, und durch dieses das Differential der Function x^n als Folge differential

bewirkt wird; damit man deutlich einsehe, worin die nunmehr folgende beträchtliche Erweiterung des Lehrsatzes bestehe.

Zweiter Lehrsatz; eine Erweiterung des ersten.

§. 17. Es ist auch $d.X^n = nX^{n-1}\,dX$ (nach §. 13. also auch $d.aX^n = naX^{n-1}\,dX$) wenn die Stammgröfse X selbst schon irgend eine beliebige Function von x ist, also in dieser Hinsicht dX, das Differential der Stammgröfse, noch besonders zu finden seyn dürfte.

B e w e i s.

§. 18. Das für die Function X durch das werdende Differential $'dx$ ihrer Grundgröfse zu bewirkende Differential $'dX$ sey, was es wolle, so mufs doch der Function X^n dadurch belegte Gröfse

$(X^n) = (X+'dX)^n = X^n + nX^{n-1}\,'dX + \frac{n.n-1.}{1.2} X^{n-2}\,'dX^2 + \ldots.$ seyn, vermöge der ersten Binomialreihe (Vorerinner. V. §. 1.); also auch das werdende Differential $'dX^n = nX^{n-1}\,'dX + \frac{n.n-1.}{1.2} X^{n-2}\,'dx^2 + \ldots.$, so lange $'dX$ mit $'dx$ noch in der Annäherung an $= o$ begriffen ist. Da nun X mag eine Function von x seyn, welche es will, allemal mit $dx = o$ auch $dX = o$ geworden seyn mufs: so hat man das noch formenvollständige genaue Differential

$d.X^n = nX^{n-1}dX + \frac{n.n-1.}{1.2} X^{n-2}dX^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$.
$X^{n-3}\,dX^3 +$ etc.

also $d.X^n = (nX^{n-1} + \frac{n.n-1.}{1.2} X^{n-2}.o + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$.
$X^{n-3}.o.o).\,dX$
$= nX^{n-1}.\,dX$, als die Gröfse des genauen Differen-

tials, welche lediglich darin bestehen kann, dafs diese $d.X^n = o$ eine $n.X^{n-1}$mal so vielmalige o ist, als die dX es seyn mufs.

Zusatz 1.

§. 19. Wenn man nämlich auch die Stammgröfse X als Function des x zu differenziiren, also das p im genauen Differentiale $dX = p.dx$ zu finden weifs: so hat man dann auch $d.X^n = n X^{n-1}. p dx$. Dann hat man, wie man in der Kürze sich ausdrücken kann, die X^n nicht nur auf X, sondern auch auf x differenziirt.

Zusatz 2.

§. 20. Dann weifs man auch den speciellen Differentialquotienten $\frac{d.X^n}{dx} = n X^{n-1}. p$ anzugeben, welchet auch die der Function X zugehörige Bestimmung $\frac{dX}{dx} = \frac{o}{o} = p$ mit ausdrückt, nicht wie der allgemeine $\frac{dX^n}{dX} = n X^{n-1}$ nur diese Bestimmung $n X^{n-1}$ angibt, welche allen X^n für jedes veränderliche X zukommt, folglich ihr $\frac{dX}{dx} = \frac{o}{o}$ unbestimmt lassen mufs, und daher auch vom dX lediglich die allgemeine Eigenschaft eines jeden Differentials zu benutzen weifs, dafs es ein $dX = o$ geworden seyn mufs.

Zusatz 3.

§. 21. In jedem Falle ist es rathsam, sich zuvörderst darzustellen das allgemeine Differential $d.X^n = nX^{n-1} dX$, woraus erhellet, dafs der specielle Differentialquotient $\frac{d.X^n}{dx} = nX^{n-1}. \frac{dX}{dx}$ ist, also in Hin-

sicht seiner Specialität nicht eher bestimmt werden kann, bis man auch das $\frac{0}{0}$ des $\frac{dX}{dx}$ als $= p$ zu bestimmen weifs. In aller Hinsicht ist es lehrreich, den nur allgemein bestimmenden Differentialquotienten $\frac{d.X^n}{dX} = nX^{n-1}$ und den speciell bestimmenden $\frac{d.X^n}{dx} = n.X^{n-1}.p$, deutlich von einander zu unterscheiden. Insbesondere aber erhellet auch daraus, dafs man sogleich an dem allgemeinen $\frac{d.X^n}{dX} = nX^{n-1}$ genug hat, wo man die Stammgröfse X als die urbelegte, also ihr dX als das Urdifferential annehmen kann, dessen ganzes Wesen darin besteht, dafs es eine dem X gleichartige, anfänglich unendlich klein angenommene und dann $= o$ gewordene Belegung des X ausmachen soll.

Am häufigsten wird dieses bei transcendenten X zu benutzen seyn. Sey z. B. $X = \sin x$, und x ein veränderlicher mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebener Kreisbogen:
so hat man $d.(\sin x)^n = n.(\sin x)^{n-1}\, d\sin x$
also $\frac{d.(\sin x)^n}{dx} = n.(\sin x)^{n-1}.\frac{d\sin x}{dx}$ und mufs nun auch, wenn hier die Bogenlänge x als die urveränderliche Grundgröfse der Function sin x soll betrachtet werden, diese Function auf x zu differentiiren wissen; da sie dann $d.\frac{(\sin x)^n}{dx} = n.(\sin x)^{n-1}.\cos x$ späterhin uns geben wird.

Kann man aber die Stammgröfse $X = \sin x$ selbst zur Urveränderlichen, also $d\sin x$ als Urdifferential annehmen: so hat man $\frac{d(\sin x)^n}{d\sin x} = n.(\sin x)^{n-1}.\frac{d\sin x}{d\sin x} = n.(\sin x)^{n-1}$, und ist der allgemeine Differential-

quotient zugleich der specielle, weil $\frac{d \sin x}{d \sin x}$ ein $\frac{0}{0}$ $= 1$ ist.

Auch bei algebraischen Functionen kann man allgemeine Differentialquotienten zu speciellen durch anders gewählte Urdifferentiale machen, z. B.

$\frac{d (\sqrt[3]{x})^5}{d \sqrt[3]{x}} = 5 (\sqrt[3]{x})^4$ ist der generelle, und erst $\frac{d(\sqrt[3]{x})^5}{dx}$ $= 5(\sqrt[3]{x})^4 . \frac{d \sqrt[3]{x}}{dx} = 5 . (\sqrt[3]{x})^4 . \frac{1}{3} . x^{-\frac{2}{3}}$ der specielle Differentialquotient, wenn dx, wie gewöhnlich, das Urdifferential seyn soll. Dagegen ist $\frac{d (\sqrt[3]{x})^5}{d \sqrt[5]{x}} = 5(\sqrt[3]{x})^4$ auch schon der specielle, wenn man $\sqrt[3]{x}$ als urbelegte Grundgröfse, also $d \sqrt[3]{x}$ zum Urdifferential annimmt.

Erweiterte Begriffe von Differentialquotienten.

§. 22. Ueberhaupt mufs jedes $\frac{dX}{d\mathfrak{X}}$ schon ein Differentialquotient heifsen, auch ehe wir entschieden sind, ob x oder $\mathfrak{X}$ oder X, oder irgend eine andere x Function $\mathfrak{x}$ die urbelegte, also dx, oder $d\mathfrak{X}$ oder dX oder $d\mathfrak{x}$ das Urdifferential seyn soll. Und wenn $\frac{dX}{d\mathfrak{X}}$ $= p$ gefunden ist, so mufs $\frac{d\mathfrak{X}}{dX} = \frac{1}{p}$ seyn.

Beispiele zum zweiten Lehrsatze

§. 23. für solche $d.X^n = nX^{n-1} dX$, deren Stammgröfse X sich nach dem ersten Lehrsatze ferner auf x differenziiren läfst.

1) $d(\sqrt{x^3})^5 = 5(\sqrt{x^3})^4 . d\sqrt{x^3}$

$= \quad . \quad . d.x^{\frac{3}{2}} = 5.(\sqrt{x^3})^4 . \frac{3}{2} . x^{\frac{1}{2}} . dx$

$\frac{15}{2} . x^{\frac{1}{2}} dx$

2) $d.\left(\frac{b}{x^3}\right)^2 = 2 \frac{b}{x^3} . d\frac{b}{x^3}$

ferner $= 2 \frac{b}{x^3} . d. bx^{-3} = -6. \frac{b}{x^3} bx^{-4} dx$

$= -6 \frac{bb}{x^7} dx$

3) $d[a(bx^2)^3]^4 = 4[a(bx^2)^3]^3 . d a(bx^2)^3$

auch $= \quad . 3a(bx^2)^2 . d. bx^2$

ferner $= \quad . 2bx. dx$

$= 24 a^{10} . b^{12} . x^{23} . dx$; hat also das Differential noch 24 Dimensionen des x, wie die vorgegebene Function; indem auch dx, nicht nur als 'dx, sondern eben deshalb nach dem Gesetze der Stetigkeit auch als $dx = o$ geworden, noch als eine Dimension des x anzunehmen ist.

Anmerkung.

§. 24. Allerdings würde man hier z. B. 1) auch auf folgende Weise

$$d.(\sqrt{x^3})^5 = d.\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^5 = d.x^{\frac{15}{2}} = \frac{15}{2} x^{\frac{15}{2}-1} dx$$

$$= \frac{15}{2} x^{\frac{13}{2}} dx$$

das vorgegebne Differentiand durch vorläufige Reductionen sogleich dem ersten Lehrsatze §. 11. unterwerfen, also unmittelbar auf x differenziiren können; späterhin aber werden wir auch allerlei andere Stammgröfsen zu behandeln haben.

Lehrsatz III.

§. 25. Wenn $S = X - Y + Z + C$, eine algebraische Summe aus mehren Functionen, auch etwanigen constanten Gliedern, wie C ist: so mufs ihr $dS = dX - dY + dZ$ auch die algebraische Summe aus den Differentialen der einzelen Glieder seyn.

Beweis.

§. 26. Der $S = X - Y + Z + C$ belegte Gröfse ist $S' = X + dX - (Y + dY) + Z + dZ + C$, und von dieser die unbelegte S abgezogen gibt $dS = dX - dY + dZ$.

Anmerkung.

§. 27. Von dem constanten Gliede C kann in diesem Differential deshalb keine Spur übrig bleiben, weil es dem Zwecke der Differentialrechnung gemäfs ist, lediglich den veränderlichen und niemals den unveränderlichen Gröfsen ein Differential beizulegen (III. §. 20.); womit aber gar wohl besteht, wie wir in der Folge es deutlich einsehen werden, dafs dessen ungeachtet in den logarithmischen Differentialen jedes ihrer constanten Glieder mit vorkommen mufs, wie dagegen in den algebraischen Differentialen jeder constante Factor vorhanden bleibt, obgleich er mit keinem Differential belegt wird. (§. 13.)

Zusatz 1.

§. 28. Für alle Resultate, welche durch Differentialmethode allein schon abzuschliefsen sind, mufs auch bei den eben hergesetzten Differentialien die Absicht seyn, dafs sie durch ihre Vernullung uns genaue Differentialquotienten liefern sollen.

Wenn nun aufser X auch Y und Z als Function von x gegeben ist,
z. B. im $S = ax^2 - bbx + x^3$, so kann
aus $dS = 2axdx - bbdx + 3x^2dx$
auch $\frac{dS}{dx} = 2ax - bb + 3x^2$ gefolgert werden,
ist also auch der Differentialquotient des S als die algebraische Summe aus den Differentialquotienten der einzelen Glieder gefunden; indem ja $\frac{d.ax^2}{dx} = 2ax$ auch $\frac{d.-bbx}{dx} = \frac{-bbdx}{dx} = -bb$ ist, u. s. w.

Zusatz 2.

§. 29. Sind dagegen die einzelen Glieder nur als Functionen verschiedener Grundgröfsen, X als Function des x; Y als Function des y, u. s. w. bekannt, dabei aber Wünsche und Hoffnungen vorhanden, dafs sie, als Functionen einer gemeinschaftlichen Grundgröfse u möchten dargestellt werden können; so kann man sich immerhin schon vorläufig vor Augen stellen, dafs dann der Differentialquotient $\frac{dS}{du} = \frac{dX}{du} - \frac{dY}{du} + \frac{dZ}{du}$ seyn mufs, auch $p = p' - p'' + p'''$ die genauen Werthe dieser Differentialquotienten gefunden seyn werden, sobald man die Functionen X, Y, Z auf u zu differentiiren weifs, und dadurch $dX = p'du$; $dY = p''du$; $dZ = p'''du$ gefunden hätte.

§. 30. Allerdings werden wir sehr vielen für die Praxis äufserst nützlichen Gebrauch der Differentialmethode für jetzt schon darzulegen wissen, ohne solch eine Behandlung von Functionen verschiedener Grundgröfsen als solcher nöthig zu haben; indessen war uns diese kurze Erwähnung von Verbindung mehrer Functionen verschiedener Grundgröfsen für die gleich

folgenden Lehrsätze nöthig, um sie in derjenigen Allgemeinheit mittheilen zu können, von welcher wir, für die Differentialrechnung selbst freilich erst einen späteren, für die Integralrechnung aber einen früheren Gebrauch schon in dem vorliegenden Lehrbuche machen werden.

Lehrsatz IV.

§. 31. Wenn x, y, z und u, überhaupt veränderliche Gröfsen bedeuten, es mögen nun bald einige, bald alle derselben von einander unabhängig oder abhängig veränderlich seyn: so ist

I. $d.xy = y\,dx + x\,dy$

II. $d.xyz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

III. $d.xyzu = yzu\,dx + xzu\,dy + xyu\,dz + xyz\,du$

und so fort, bei noch mehren veränderlichen Gröfsen.

Erörterung.

§. 32. Wenn der Ite Fall, mit zwei veränderlichen Gröfsen erwiesen ist, so braucht man nur das Product aus dreien, xyz, als ein $(xy).z$, als ein Product aus zweien zu betrachten, um vermöge des erwiesenen I,

auf $d.xyz = d(xy).z = [d(xy)]z + (xy).dz$

$= (y\,dx + x\,dy)z + xy\,dz$ zu schliefsen

d. i. $dxyz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, der IIte Satz.

Aus dem Iten und IIten folgt nun ferner

$d[(xyz).u] = (d.xyz).u + xyz.du$

$= yzu\,dx + xzu\,dy + xyu\,dz + xyz\,du$

welches der IIIte Satz ist; dafs also alles darauf ankommt, den Iten Satz erwiesen zu haben.

Beweis durch relatives Verschwinden.

§. 33. Da des xy belegte Gröfse $(xy)^1 = (x+dx)(y+dy)$, also $(xy)^1 = xy + ydx + xdy + dxdy$ ist: so würde man $d.xy = ydx + xdy + dxdy$ haben, wenn nicht zu bedenken wäre, dafs das dritte Glied als ein Unendlich kleines der zweiten Ordnung, gegen die beiden ersten Glieder, welche einzeln, und daher auch in ihrer Summe ein Unendlichkleines der ersten Ordnung ausmachen, verschwindend und daher wegzustreichen sey. (Meine Bedenken gegen diese Beweisart sind schon in V. §. 9. aufgestellt.)

Unmittelbarer Beweis durch absolute Verschwindung.

§. 34. Das werdende Differential

$$'d.xy = y'dx + x'dy + 'dx.'dy$$

ist zum $d.xy = ydx + xdy + dxdy$

nämlich zum genauen formenvollständigen Differential geworden, wenn $dx = o$ und $dy = o$ geworden ist; dessen ungeachtet aber alle dx und dy noch hingeschrieben bleiben, um die Form vollständig beizubehalten.

Das schlechthin so genannte Differential d.xy soll blos die Gröfse des genauen Differentiales angeben, also angeben, eine wie vielmalige o das $d.xy = o$ ist.

Nun mag man

1) sich $d.xy = (y+dy).dx + xdy$, oder mag
2) sich $d.xy = (x+dx)dy + ydx$ schreiben: so erhält man $d.xy = ydx + xdy$;

weil in 1) des $(y+dy).dx$ Gröfse $= (y+o)dx = ydx$ und in 2) des $(x+dx).dy$ Gröfse $= (x+o)dy = dy$ ist.

Anmerkung.

§. 35. Allerdings weifs man hiermit über die Gröfse des Differentiales d.xy nichts genaueres zu

sagen, als dafs es eine $(y \cdot x)$malige o ist. Auch mufs man etwas Genaueres darüber gar nicht verlangen, so lange die x und y keiner genaueren Bestimmung unterworfen seyn sollen, als dafs sie zwei veränderliche Gröfsen seyen, welche in einander multiplicirt werden. Solche Unbestimmtheit ist als Uneingeschränktheit, als Allgemeinheit etwas werth.

Wäre die veränderliche y darauf eingeschränkt, dafs sie ein $y = 2x$ seyn sollte, so würde eben dadurch das generelle Differential

$d.xy = ydx + xdy$ auf das specielle

$d.x.2 = 2.dx + x.2dx = 4xdx$ eingeschränkt seyn; welches mit dem ersten Lehrsatze übereinstimmt, nach welchem $d.2x^2 = 2.2xdx$ seyn mufs.

Namentlich in der Integralrechnung wird uns auch das generelle Differential schon grofse Dienste leisten. Für die Resultate der Differentialrechnung kommt es dagegen auf die Gröfse der Differentialquotienten an; daher ich auch in dieser Hinsicht noch folgenden Beweis hinzufüge, der aber überdies auch den Anfängern vorzüglich zu empfehlen ist.

Beweis vermittelst der Differential-quotienten.

§. 36. 1) Ist eine der beiden veränderlichen Gröfsen, y, als Function der andern x bekannt, und x zur urbelegten Grundgröfse angenommen: so wird aus dem werdenden Differential

$'d.xy = y'dx + x'dy + 'dx'dy$ auf den werdenden Different. Quotienten

$\frac{'d.xy}{'dx} = y + x\frac{'dy}{'dx} + 'dy$ geschlossen, der nun den genauen

$\frac{d.xy}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$ gibt, weil mit $'dx = dx = o$

geworden, auch $'dy = dy = o$ geworden seyn mufs (V. §. 6.). Mit diesem Ausdrucke der Differentialquotienten ist nun die Gleichung des Lehrsatzes $d.xy = ydx + xdy$ völlig gleichbedeutend.

2) Ist man blofs gewifs, dafs y und x zwei von einander abhängige und daher einander functionirte Gröfsen sind, ohne y als Function von x, oder x als Function von y schon angeben zu können; mufs es also auch unentschieden gelassen werden, ob man x oder y am schicklichsten zur Urbelegten anzunehmen habe: so pflegt man

aus $'d.xy = y'dx + x'dy + 'dx\,'dy$

auf $\frac{'d.xy}{'du} = y\frac{'dx}{'du} + x\frac{'dy}{'du} + \frac{'dx\,'dy}{'du}$ zu schliefsen, wo nun u entweder x oder y, oder auch eine solche dritte veränderliche Gröfse seyn soll, welche sowohl für x als y eine gemeinschaftliche Grundgröfse abgeben, und schicklich mit dem Urdifferentiale du belegt werden könne.

Hier ergiebt sich nun das genaue Differential

$$\frac{d.xy}{du} = y\frac{dx}{du} + x\frac{dy}{du};$$

denn es mag das letzte Glied $\frac{dx\,dy}{du}$ als $\frac{dx}{du}.dy$ oder als $dx.\frac{dy}{du}$ zu betrachten seyn, so mufs es im ersten Falle durch den Factor $dy = o$ im zweiten Falle durch den Factor $dx = o$ vernullt werden, selbst auch wenn sich für den andern Factor $\frac{o}{o} = \left(\frac{dx}{du} \text{ oder } \frac{dy}{du}\right)$ eine solche Function des u ergeben sollte, die bei einigen Werthen des u ein Unendlichgrofses ausmachen könnte. (Man sehe Vorerinner. IX. §. 9. 10.)

Zusatz 1.

§. 37. Gerade dieses, nte Verfahren ist in der neuern Analyse das gewöhnlichste, weil es auch das

erste mit umfafst. Denn fände man bei näherer Bekanntschaft mit der Functionirung zwischen x und y, dafs x selbst ganz schicklich mit dem Urdifferential könnte belegt werden; so würde man sagen, dafs u $=$ x, also du $=$ dx zu nehmen sey; wodurch man aus dem unter 2) gefundenen $\frac{d.xy}{du} = y\frac{dx}{du} + x\frac{dy}{du}$ sogleich das vorhin unter 1) gefundene $\frac{d.xy}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$ erhält.

Folgerung des speciellen Differentiales.

§. 38. Weifs man nun y als Function von x anzugeben, auch auf x zu differenziiren, also dy $=$ pdx zu finden, so hat man $\frac{d.xy}{dx} = y + x\frac{pdx}{dx}$, woraus das specielle Differential d.xy $=$ ydx $+$ xpdx folgt, dessen y nun auch als Function von x bekannt ist.

Oder hat man x als Function von u auf u differenziirt, dx $=$ p' du,

auch y als Function von u auf u differenziirt, dy $=$ p'' du gefunden:

so weifs man, dafs $\frac{d.xy}{du} = y\frac{dx}{du} + x\frac{dy}{du} = yp' + xp''$

also d.xy $=$ y.p'du $+$ xp'' du ist, dessen y und x man nun auch wohl durch einander auszudrücken sucht.

[Ein leichtes Beispiel für Anfänger sey $x = au^2$, $y = u^3$, also $y = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$ und $x = ay^{\frac{2}{3}}$]

Folgerung des generellen Differentiales.

§. 39. Wenn es uns aber nicht gelingen wollte, die Functionirung zwischen x und y oder zwischen

x und u, auch y und u wirklich aufzufinden, obgleich wir überzeugt wären, dafs die erste, folglich auch jede der beiden letztern vorhanden sey: so würden wir uns begnügen müssen, aus dem Differentialquotienten auf das generelle Differential d. xy = y dx + x dy zu schliefsen. Oder sollten wir am Ende einsehen, dafs zwischen x und y gar keine Abhängigkeit Statt findet, sondern beides unabhängig veränderliche Gröfsen sind: so würden wir sogar wissen, dafs durch das generelle Differential d. xy = ydx + xdy alles bestimmt sey, was hier bestimmt werden kann.

Für jeden dieser beiden Fälle kann man aus dem genauen Differentialquotienten auf das genaue Differential zurück schliefsen, weil auch der Differentialquotient schon für jeden Fall richtig ausgedrückt und einerlei ist. Denn in jedem Falle bleibt man überzeugt, dafs sein drittes Glied $\frac{dx\,dy}{du} = o$ geworden seyn mufs. Der Unterschied in der Ueberzeugung ist lediglich folgender. Im ersten Falle weifs man, dafs dx und dy als Folgedifferentiale mit ihrem Urdifferentiale du sich vernullt haben müssen. Im zweiten Falle aber weifs man, dafs dx und dy, als zwei von einander unabhängige Urdifferentiale jedes für sich = o werdend seyn müssen; indem ja das ganze Wesen dieser Urdifferentiale darin besteht, dafs $dx = \frac{x^o}{\infty}$ und $dy = \frac{y^o}{\infty}$ werdend und geworden seyn soll. (III. §. 26.)

Geometrische Darstellung.

§. 40. Seyen x und y die beiden Dimensionen eines Rechteckes, so ist d. xy = y dx + x dy + dx dy das Differential des Flächenraumes, eine Belegtheit des Veränderlichen im Flächenraume, welche mit

$dx = o$ und $dy = o$, als Flächenraum sich vernullt haben muſs, bei dieser Vernullung aber zur lineären Gröſse $x + y$ geworden ist, welche die beiden veränderlichen Endgränzen des Rechteckes ausmacht; auch wenn sie beide von einander unabhängig veränderlich sind.

Sey nun aber z. B. die Abhängigkeit $y = 2x$ gegeben, so hat man auch $dy = 2dx$, also das specielle Differential $d.xy = 2x\,dx + x.2dx$ völlig damit übereinstimmend, daſs $d.x.2x = d.2x^2 = 2.2x\,dx$ ist, welche letztere Gleichungen man freilich sogleich erhält, wenn man die gegebne Abhängigkeit $y = 2x$ schon vor der Differenziirung benutzt, um y zu eliminiren.

§. 41. Sey z. B. für das Rechteck $U = xy$ die Abhängigkeit $y + x = a$ gegeben, womit also die Veränderlichkeit des x und y darauf eingeschränkt wird, daſs die Summe beider Dimensionen eine constante Linie a ausmachen soll: so kann daraus $y = a - x$ gefolgert, und schon vor der Differenziirung das specielle $U = x(a - x) = ax - xx$ mit eliminirtem y erhalten werden, welches nun sogleich das specielle Differential $dU = adx - 2x\,dx$, also den speciellen Differentialquotienten $\frac{dU}{dx} = a - 2x$ gibt.

Man wird indessen besser thun, sich zuvörderst das generelle Differential $dU = y\,dx + x\,dy$ darzustellen; für die Voraussetzung, daſs dx das Urdifferential bleiben solle, den generellen Quotienten $\frac{dU}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$ zu folgern, und dann erst aus der Abhängigkeit $y = a - x$ auf $dy = -dx$ also $\frac{dy}{dx} = -1$, und dadurch auf $\frac{dU}{dx} = y - x = a - x - x = a - 2x$ zu schlieſsen. Denn es ist rathsam schon bei den leichtern Fällen

sich an die jetzt üblichen Methoden für die schwierigen Fälle zu gewöhnen, bei welchen hauptsächlich die Gleichungen zwischen den Differentialen und Differentialquotienten zu beachten sind. Sogleich die erste hier aufgeführte Gleichung $U = xy$ ist als endliche Gleichung so gut als nichts bestimmend, macht nur eine Denomination der Functionsform xy aus; liefert aber eben dadurch die Differentialgleichung $dU = ydx + xdy$, als eine wesentliche Hülfe und Grundlage zu den Untersuchungen vermittelst der Differentiale und Differentialquotienten.

Zusatz 1.

§. 42. Da wir, nach dem Lehrsatze, $d.xy = ydx + xdy$ haben, so mufs auch $d.(\mp a).xy = \mp aydx \mp axdy$ seyn; eben so auch $d.axyz = ayzdx + axzdy + axydy$ seyn, wenn a eine überhaupt unveränderliche, oder doch eine von x, y und z nicht abhängige, also auch von deren Belegung dx, dy, dz unabhängige Gröfse ist (§. 13.).

Zusatz 2.

§. 43. Hätten wir schon $d.xyz = yzdx + xzdy + xydz$ unter der Voraussetzung, dafs alle drei Gröfsen veränderlich seyen, hingeschrieben, fänden aber dann als ausgemacht, oder doch einstweilen anzunehmen räthsam, dafs z. B. die z als eine beständige, nicht veränderliche Gröfse zu behandeln sey: so mufs dz und alles was mit dz multiplicirt ist, im Differentiale und im Differentialquotienten wegfallen; und wenn man hiebei zu sagen pflegt, dafs dann $dz = o$ sey; so werden wir das unzweideutig zu verstehen wissen, indem wir sagen, dafs dieses dz auch als 'dz im werdenden Differential und Differentialquotienten schon $= o$ sey, wo die übrigen 'dx, 'dy noch erst $= o$ werdend gedacht werden.

Beispiele für Lehrsatz IV.

§. 44. 1) $d.ax^5.6x^{\frac{1}{3}} = 6a\,d.x^5x^{\frac{1}{3}} = 6a(x^{\frac{1}{3}}5x^4 + x^5.\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})dx$

$= 6a(5+\frac{1}{3})x^{4+\frac{1}{3}}dx.$

Hier hätte man allerdings auch kürzer schliefsen können, dafs $d.ax^5.6x^{\frac{1}{3}} = 6.ad.x^{\frac{1}{3}}$, also schon nach Lehrsatz I. sogleich $= 6.a.(5+\frac{1}{3})x^{4+\frac{1}{3}}dx$ seyn mufs.

2) $d.(a^2+x^2)^n.x^3 = x^3n(a^2+x^2)^{n-1}.d(a^2+x^2)+(a^2+x^2)^n.dx^3$

$= \quad , \quad . 2xdx + , \quad 3x^2dx$

3) $d(x+y)^3.x^2 = x^2.3(x+y)^2(dx+dy)+(x+y)^3.2xdx$

4) $d.x^2.\sin z = \sin z.2xdx + x^2.d\sin z.$

Obgleich wir in diesem letzten Beispiele das Differential d sin z noch nicht anzugeben wissen, weil sin z eine nicht algebraische, transcendente Function ist: so konnte doch das Differential der Function x^2 sin z in so fern sie ein Product, also algebraisch ist, hier schon ausgedrückt werden.

Lehrsatz V.

§. 45. Wenn im gebrochenen $\frac{z}{n}$, sowohl der Zähler als der Nenner veränderlich ist, so ist $d.\frac{z}{n} = \frac{ndz - zdn}{nn}$

Unmittelbarer Beweis.

§. 46. Des $\frac{z}{n}$ belegte Gröfse ist $\left(\frac{z}{n}\right)^x = \frac{z+dz}{n+dn}$,

also $d\frac{z}{n} = \frac{z+dz}{n+dn} - \frac{z}{n} = \frac{nz+ndz-nz-zdn}{n(n+dn)}$

$= \frac{ndz-zdn}{n(n+dn)}$ das noch werdende,

und daher $d\frac{z}{n} = \frac{n\,dz - z\,dn}{nn}$ das genaue Differential, weil ja $n + dn$, mit $dn = o$, genau $= n$ geworden seyn mufs.

Ich halte nicht für nöthig diesen unmittelbaren Beweis noch strenger durch Aufführung des Differentialquotienten zu machen; da wir die folgende Beweise, durch andere schon völlig scharf erwiesene Lehrsätze vor uns haben.

Beweis durch Lehrsatz I. und II.

§. 47. Da $\frac{z}{n} = z\,n^{-1}$ ist, so hat man zuvörderst durch Lehrsatz IV,

$d\frac{z}{n} = n^{-1}.\,dz + z\,d.n_{-1}$, und nun durch Lehrsatz I.

$d\frac{z}{n} = n^{-1}.\,dz - 1.z\,n^{-2}\,dn = \frac{dz}{n} - \frac{z\,dn}{nn}$, w. z. E.

Beweis durch Substitution und Lehrsatz IV.

§. 48. Man setze $\frac{z}{n} = q$, so hat man $z = qn$, also nach Lehrs IV.

$dz = n\,dq + qdn$, folglich $ndq = dz - qdn$.

Das ist nun $n\,d\frac{z}{n} = dz - \frac{z}{n}$, durch Eintauschung des substituirten q,

also $d\frac{z}{n} = \frac{dz}{n} - \frac{zdn}{nn}$. W. z. E.

§. 49. Anm. Das Wolfische, Welches zu Erweisen, pflege ich hinzuzufügen, wo ich andeuten will, dafs der hingeschriebene Erfolg mit dem aufgestellten Lehrsatze so gut wie einerlei ist.

Die dort aufgestellte Formel ist mit einem $\frac{n}{n}$ allerdings überladen, wird aber so dem Gedächtnisse am leichtesten eingeprägt, auch wegen ihres allgemeinen Divisors nn meistens für die Anstellung vorzüglich bequem befunden werden.

Z u s a t z.

§. 50. Die Formel ist auch in Hinsicht des Bejahten und verneinten durchgreifend, auch algebraisch richtig. Wenn z. B. der Nenner n, entweder 1) ausdrücklich bejaht, oder 2) ausdrücklich verneint gegeben wird: so mufs im ersten Falle $d\frac{z}{+n} = \frac{ndz-zdn}{nn}$ bleiben (man sehe darüber III. §. 31.), und im 2ten Falle $\frac{dz}{-n} = \frac{-ndz+zdn}{nn}$ seyn, weil $d(-n) = -dn$ ist (III. §. 30.).

Damit stimmt nun völlig überein, dafs durch die bejahte Belegung $+dn$ des Nenners, der Werth des Bruches auch algebraisch verkleinert wird; durch eine verneinte Belegung $-dn$ des Nenners aber, der Werth des Bruches algebraisch vergröfsert seyn mufs; so lange dem dn noch einige Gröfse zugeschrieben wird. Ist es aber wirklich $= o$ geworden, so mufs doch $+dn = +o$ und $-dn = -o$ geachtet werden, und jenes als die niedrigste Gränze eines verschwindenden $+dn$, dieses aber als die algebraisch höchste Gränze eines verschwindenden $-dn$ unterscheidbar bleiben.

Beispiele für Lehrsatz V.

§. 51. $d\frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2.2x\,dx - x^2.2y\,dy}{y^4} = 2\frac{xy^2dx - x^2ydy}{y^4}$

$d\left(\frac{a^2+bx}{a-x}\right) = \frac{(a-x).d(a^2+bx).d(a^2+bx)d(a-x).}{(a-x)^2} = \frac{a^2+ab}{(a-x)^2}.dx$

$d\left(\frac{ab}{xy}\right) = -ab\left(\frac{x\,dy+y\,dx}{x^2y^2}\right).$

Auch ist $d.\frac{ab}{xy} = ab.\,d(xy)^{-1} = -ab.\,(xy)^{-2}\,d.\,xy$

$$= -\frac{ab}{x^2y^2}(x\,dy + y\,dx).$$

$$d\,\frac{\log x}{\sin z} = \frac{\sin z.\,d\log x - \log x\,d\sin z}{\sin z^2}.$$

Obgleich im letzten Beispiele Zähler und Nenner transcendente Gröfse sind, deren Differentiale wir noch nicht anzugeben wissen, so ist doch die Differenziirung der Function $\frac{\log x}{\sin z}$ dem Lehrsatze in so weit unterworfen, als sie eine Division, also eine algebraische Operation ausmacht.

§. 50. Nachdem wir nun seit Lehrsatz III. §. 25. schon geübt sind, uns mehre veränderliche Gröfsen, und jede mit ihrem Differential belegt, neben einander zu denken: so wird nunmehr die folgende Erweiterung des Iten Lehrsatzes deutlicher verstanden werden, als wenn wir sie schon vorher hätten hinzufügen wollen.

Lehrsatz VI. Zweite Erweiterung des Iten Lehrsatzes.

§. 52. Es ist auch $d.U^n = nU^{n-1}\,dU$, wenn U nicht etwa blos eine Function einer einzigen veränderlichen x, sondern irgend eine Function von mehren veränderlichen Gröfsen x, y, z, u. s. w. ist.

Beweis.

§. 53. In der Binomialreihe $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n.n-1.}{1.2}a^{n-2}b^2 + \ldots$ kann a und b seyn, was es will (Vorerinner. V.) also auch $a = U$ und $b = 'dU$, diese U und $'dU$ möchten seyn, was sie wollen.

Da nun $'d.U^n = (U+dU)^n - U^n$ bedeutet, so hat man

$$'d.U^n = nU^{n-1}\,'dU + \frac{n.n-1}{1.2}U^{n-2}\,'dU^2 + \ldots,$$

also $$\frac{'d.U^n}{'dU} = nU^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2}U^{n-2}.\,'dU + \ldots$$

Da nun, U mag seyn eine Function von x, y, z, u. s. w. welche es will, ihr Differential dU völlig $= o$ geworden seyn mufs, sobald die Urdifferentiale dx, dy, dz, ... es geworden sind: so hat man

$$\frac{d.U^n}{dU} = nU^{n-1} + o\,;\ \text{W. z. E.}$$

B e i s p i e l e.

§. 54. $d(x^3+ay^2+abz)^3 = 3(x^3+ay^2+abz)^2.$
$(3x^2dx + 2aydy + abdz)$

$d(x^3 + a[\sin z]^2 + ab\log u)^2 = 2(x^3 + a\sin z^2$
$+ ab\log u).\ (3x^2dx + 2a\sin z\, d\sin z$
$+ ab.d\log u).$

§. 55. *Die sämmtlichen obigen Lehrsätze* sind:

I. $d.x^n = nx^{n-1}dx$
II. $d.X^n = nX^{n-1}dX$
VI. $d.U^n = nU^{n-1}dU$
III. $d.(X - Y + Z + C) = dX - dY + dZ$
IV. $d.xy = y\,dx + x\,dy$
auch $d.xyz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$
u. s. w.
V. $d\frac{z}{n} = \frac{n\,dz - z\,dn}{nn}$.

§. 56. Der IIte Lehrsatz, welcher das Differential einer algebraischen Summe angibt, umfafst eben damit auch das Differential von einer schlechthin genannten Summe und Differenz.

Wenn man behaupten wollte, dafs der Lehrsatz für x^n schon im IVten für die Differenziirung der Producte enthalten sey, weil z. B.

$$\text{mit } d.xy = y\,dx + x\,dy$$
$$\text{auch } d.xx = x\,dx + x\,dx = 2x\,dx$$
$$\text{eben so mit } d.xyz = yz\,dz + xz\,dy + xy\,dz$$
$$\text{auch } d.x^3 = xx\,dz + xx\,dy + xx\,dx = 3xx\,dx$$

erwiesen sey: so mufs man dagegen bedenken, dafs ja im x^n der Exponent n nicht blofs eine bejahte ganze Zahl, sondern auch gebrochene bejahte und verneinte, sogar irrationale und unmögliche seyn kann. Selbst wenn n eine ganze verneinte Zahl, und z. B. nur $n = +1$ ist, so hat man ja durch x^{-1} $= \frac{1}{x}$ sogar eine Division, die Antagonistin der Division umfafst. (Möchte doch dieses von solchen philosophisch seyn wollenden Schriftstellern bedacht werden, welche die Schwierigkeiten in der Potenzenrechnung durch erweiterten Begriff der Multiplication zu heben suchen!)

§. 56. Meine Erweiterungen des 1ten Lehrsatzes können den schon Geübten allerdings entbehrlich scheinen, weil man ja nur sogleich zu fordern brauche, dafs x im x^n jede veränderliche Gröfse, und dx ihr Differential bedeuten solle: und dann dergleichen geradezu statt x substituiren könne! So weit ich davon entfernt bin, den Nutzen und die Unentbehrlichkeit der Substitutionen zu verkennen, wie es auch der Beweis in §. 48. schon beweisen kann: so scheint es mir doch, dafs man zu häufig sich denselben zu überlassen pflege, wo man sie durch eine allgemein aufgestellte Formel hätte entbehrlich machen, und die Befolgung des allgemeinen Gesetzes unmittelbar vor Augen behalten können. Die obigen Erweiterungen des 1ten Lehrsatzes, als solche, wer-

den den Anfängern nicht nur, sondern namentlich beim Integriren auch den Geübteren sich sehr empfehlen.

§. 58. Diese Regeln sind nun allerdings hinreichend, um für jede algebraische Function ihr nöthiges Differential zu finden, das heifst, alle diejenigen Glieder des Differentials zu finden, durch welche die Gröfse ihrer Differentialquotienten bestimmt wird.

Das formenvollständige Differential, wo es von dem nöthigen verschieden ist, wird durch diese Regeln nicht gefunden. Z. B. für $d.xy$
gibt die Regeln nur $= y\,dy + x\,dy$
da hingegen $= y\,dx + x\,dy + dx\,dy$
das formenvollständige seyn würde; dessen 3s Glied aber für den Differentialquotienten $\frac{d.xy}{dx}$ ein $\frac{dx\,dy}{dx} = dy = o$ und für den Differentialquotienten $\frac{d.xy}{dy}$ ein $\frac{dx\,dy}{dy} = dx = o$ geben würde, und daher auf dessen Gröfse keinen Einfluſs behält.

§. 59. Obgleich nun aus dem formvollständigen
$$d.xy = y\,dx + x\,dy + dx\,dy$$
sogleich auf $\triangle.xy = y\triangle x + x\triangle y + \triangle x\triangle y$ als die allgemeine, auch endliche Differenz kann geschlossen werden; das nöthige Differential aber dazu nicht unmittelbar hinreichend ist: so werden wir doch in der Folge lernen, wie vermittelst der nöthigen Differentiale, wenn nur erst die nöthigen höheren Differentiale hinzugekommen seyn werden, ebenfalls auf die allgemeine Differenz der Function kann geschlossen werden.

§. 60. Aufser dem Addiren und Subtrahiren (welches durch das algebraische Summiren umfafst wird), dem Multipliciren, Dividiren und Potenziren, haben

wir oben I. §. 7. noch das Formiren der Gleichungswurzeln als eine besondere recht eigenthümliche algebraische Operation aufgeführt, und gleichwohl für dieselbe bisher noch keine besondere Differenziirungs-Regeln gegeben! Hierauf habe ich folgendes zu erwiedern.

Wo die Form der Gleichungswurzeln wirklich bekannt ist, da ist es ja bekannt, wie man die in der Gleichung vorkommenden Gröfsen, durch Potenziren, Dividiren, Multipliciren und Summiren behandeln soll, um die Gleichungswurzeln zu erhalten, müssen also auch die Regeln in §. 52. ausreichend seyn, um die nöthigen Differentiale dieser Wurzeln zu finden, falls in ihren Formen veränderliche Gröfsen vorkommen. Was aber selbst auch bei noch unbekannten Formen der Gleichungswurzeln, gleichwohl für deren Differentiale aus der Form der Gleichung schon gefolgert werden kann, das wird man im folgenden Capitel, als Differenziirung unentwickelter Functionen aufgeführt finden, indem diese Methode zugleich überhaupt ein Hülfsmittel ausmacht, manche Differentiale leichter und anstelliger, zu finden, als wenn man sich geradezu nur der obigen Regeln bedient. Die beiden andern dort mit aufgeführten Hülfsmittel sind 2) das partielle Differenziiren, und 3) das Differenziiren durch Substitution.

Uebrigens versteht es sich von selbst, dafs mancher vorgegebne Differentiand durch vorläufige algebraische Operationen in eine andere Form gebracht werden kann, auf welche die gewöhnlichen Differenziirungsregeln sich leichter anwenden lassen; wofür in der Folge mehre Beispiele, und späterhin, bei den transcendenten Functionen, sehr merkwürdige vorkommen werden.

Die gewöhnlichen Differenziirungsregeln aber, wie sie in §. 54. für die algebraischen Functionen aufgestellt sind, haben sehr zweckmäfsig die Absicht, nur die vollständige Gröfse des genauen Differentialquotienten, und des dadurch bestimmten Functions-Differentiales zu finden; und von solchen Hülfsmitteln, durch welche man auch die Auffindung ihrer vollständigen Form sich erleichtern kann, wird erst späterhin die Rede seyn.

Siebentes Capitel.

Hülfsmittel zum bequemen differenziiren.

1.

Differenziiren unentwickelter Functionen.

§. 1. Die Gleichung $yy - 2xy + x^3 = o$ für y aufgelöst gibt $y = x \mp (x^2 - x^3)^{\frac{1}{2}}$

also $dy = dx \mp \frac{1}{2}(x^2 - x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 3x^2)\,dx$

$$dy = \left(1 + \frac{2x - 3x^2}{2(x^2 - x^3)^{\frac{1}{2}}}\right) dx,$$ woraus sogleich der Werth des Differentialquotienten folgt, wenn x selbst zur Grundgröfse der Function angenommen ist.

Hier wurde nun y durch Auflösung der Gleichung als eine völlig entwickelte Function von x dargestellt; und es konnte in dieser Function, da sie durch Algebra gefunden war, keine Verbindung vorkommen, für welche wir nicht durch die vorigen Lehrsätze hätten auf x differenziiren können.

§. 2. Aber noch ehe die Gleichung aufgelöst war, war es doch schon gewifs, dafs y eine Function

von x sey. Denn wenn in einer Gleichung nur zwei veränderliche Gröfsen vorkommen, so ist es ja ausgemacht, dafs die eine sich ändern mufs, wenn die andere verändert wird. Daher sind wir berechtigt, auch x und y geradezu in der unaufgelösten Gleichung zu differenziiren, welches uns ebenfalls nicht fehlen kann, da die Gleichung vermittelst algebraischer Operationen zusammengesetzt ist.

Durch dieses Verfahren erhalten wir

$2y\,dy - 2x\,dy - 2y\,dx + 3x^2\,dx = 0$,

also $(2y-2x)\,dy = (2y-3x^2)\,dx$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-3x^2}{2y-2x}$;

ein Differentialquotient, der immerhin nützlich werden kann, obgleich in seinem Werthe freilich y noch als eine unentwickelte Function vorkommt. Wir wissen nämlich von y nur, dafs es eine Function von x ist; nicht aber, was für eine es sey. Diese Unvollkommenheit des Differentialquotienten ist eine natürliche Folge unsers Verfahrens, da wir die Gleichung $yy - 2xy + x^3 = 0$ geradezu differenziirten, ohne noch entwickelt zu haben, was für eine Function von x das y sey. Wollen wir die Entwickelung hinterher noch hinzufügen, so haben wir den Werth $y = x \mp (x^2-x^3)^{\frac{1}{2}}$ zu substituiren, welches dann $\frac{dy}{dx} = \frac{2x \mp 2(x^2-x^3)^{\frac{1}{2}} - 3x^2}{\mp 2x \pm 2(x^2-x^3)^{\frac{1}{2}} - 2x} = \frac{\mp 2(x^2-x^3)^{\frac{1}{2}} + 2x - 3x^2}{\mp 2(x^2-x^3)^{\frac{1}{2}}}$, gerade so wie vorhin (§. 1.) giebt.

§. 3. Da man oft genug auf Gleichungen kommt, die man noch nicht aufzulösen weifs: so ist es doch immerhin etwas werth, sie geradezu differenziiren zu können, und dadurch das Verhältnifs zwischen den Differentialien ihrer beiden veränderlichen Gröfsen zu finden; obgleich bis zur Auflösung der Gleichung, der Ausdruck dieses Verhältnisses die beiden unbekannten Gröfsen enthalten wird; den einzigen Fall ausgenom-

men, dafs eine derselben nur in der ersten Dignität vorkommt; da denn für diese die Gleichung wirklich schon so gut als aufgelöst ist.

Ja, man pflegt auch solche Gleichungen, die man aufzulösen weifs, meistentheils schon unaufgelöst zu differenziiren, und dann hintenher erst zu überlegen, wie man am leichtesten oder zweckmäfsigsten zum entwickelten Ausdrucke des Differentials, also auch des Differentialquotienten, durch Auflösung der Gleichung gelangen könne. Man hat dann, Falls man die Gleichung für beide veränderliche Gröfsen aufzulösen weifs, auch namentlich die Wahl frei behalten, durch welche von beiden man den Differentialquotienten ausgedrückt wissen wolle.

Ein Par Beispiele.

§. 4. Für den Kreis sey die Gleichung aus dem Mittelpuncte gegeben, $yy = rr - xx$. Nach dem Gebrauche, den man für die Untersuchungen oder Anwendungen des Kreises von dieser Gleichung zu machen hat, wird y als Function von x, oder auch x als Function von y, oder auch y und x als Function einer dritten veränderlichen Gröfse u zu betrachten seyn. Wir mögen nun wählen, was wir wollen, z. B. das erste, so ist die Function y in der Gleichung noch verwickelt; denn die Gleichung gibt so wie sie dasteht, nur an, was yy für eine Function von x ist. Die Function für y wäre dagegen $y = \mp \sqrt{rr - xx}$, welches eine Entwickelung durch Würzelziehung ausmacht. Hätte ich diese Entwickelung schon vor dem differenziiren vorgenommen: so würde nun aus $y = \mp (rr - xx)^{\frac{1}{2}}$ folgen

$dy = \mp \frac{1}{2}(rr - xx)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x\,dx = \mp \frac{-x\,dx}{(rr - xx)^{\frac{1}{2}}}$; wodurch uns allerdings der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{(rr - xx)^{\frac{1}{2}}}$

sogleich völlig entwickelt, und als eine Function von x dargestellt wäre.

Indessen ist es weit bequemer, sogleich die Gleichung $yy = rr - xx$ zu differenziiren; welches $2y\,dy = -2x\,dx$. und daher $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ gibt.

Es lassen sich auch durch diesen Ausdruck des Differentialquotienten in der That viele Eigenschaften des Kreises sehr gut und besser erkennen, als wenn man ihn durchaus nur durch x oder durch y ausdrückt. Ueberdies ist es nun sehr leicht, das eine oder das andere hintenher zu thun, und darunter das bequemste oder zweckmäfsigste zu wählen.

§. 5. Für die Parabel aus dem Scheitel ist die Gleichung $yy = ax$. Differenziire ich sie geradezu, so ist ihre Differentialgleichung $2y\,dy = a\,dx$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$.

Dieser Ausdruck des Differentialquotienten scheint auf den ersten Anblick schon entwickelt zu seyn. Aber wenn $\frac{dy}{dx}$ wirklich der Differentialquotient seyn soll, so mufs x die Grundgröfse bedeuten, von welcher y als eine Function betrachtet wird; daher man den Ausdruck $\frac{a}{2y}$ nicht eher entwickelt nennen kann, als bis man y durch x ausgedrückt hat. Da ist nun $y = \mp\sqrt{ax}$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\mp 2\sqrt{ax}}$.

Selbst auch, wenn ich y als Grundgröfse, und x als Function von y betrachte, so ist in der Gleichung $ax = yy$ die Function noch verwickelt; denn ich mufs erst durch a dividiren, um die $x = \frac{yy}{a}$ völlig entwickelt zu sehen. Thue ich das nicht, so differenziire

für x als eine unentwickelte Function, indem ich sofort aus der Gleichung auf $adx = 2y\,dy$ schliefse, und hieraus $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$ folgere.

§. 6. Ist die Gleichung $XX + aX = YY$ gegeben, und soll darin X selbst noch eine Function von x, und Y eine Function von y bedeuten: so ist doch fürs erste von X und Y, dafs beide einander functionirt sind, schon dadurch gewifs, weil aufser ihnen nur noch unveränderliche Gröfsen in der Gleichung vorkommen, folglich durch jede Aenderung des X auch eine Aenderung des Y und umgekehrt bewirkt werden mufs. Also mufs man sie neben einander differenziiren können, welches $2X\,dX + a\,dX = 2Y\,dY$ gibt.

Wäre es nun für die vorgesetzte Untersuchung schon hinreichend, dafs etwa Y als Function von X betrachtet, X selbst also als Grundgröfse angenommen werde: so würde dann auch $\frac{dY}{dX} = \frac{2X + a}{2Y}$ schon der erforderliche Differentialquotient seyn, der nur noch durch Auflösung der Gleichung etwa für diese oder jene Absicht braucht entwickelt zu werden.

Soll dagegen Y als Function von x, und x als Grundgröfse betrachtet werden, so ist der Differentialquotient $\frac{dY}{dx} = \frac{2X + a}{2Y} \cdot \frac{dX}{dx}$; also dieser durch genaue Werthe brauchbar erst vorhanden, wenn man auch dX auf x differenziirt, und dadurch $\frac{dX}{dx} = \mathfrak{X}$ gefunden hat; wo nun $\mathfrak{X}$ selbst noch eine wirkliche oder doch eine Scheinfunction des x ist; das letztere, falls es nur noch ein $x^0 = 1$ in sich hat.

Bringt es die Untersuchung so mit sich, dafs auch Y noch nicht, sondern gerade nur y als Fun-

ction von x betrachtet werde: so muſs man auch dY als $\mathfrak{Y}$dy zu finden wissen, und erhält dann den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = \frac{2X + a}{2Y} \cdot \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Y}}$.

Anmerkung.

§. 7. Nach solchen Beispielen, und nach denen Bemerkungen, welche der Ueberschrift dieses Capitels eigenthümlich angemessen waren, wird man diese Aussonderung rathsam für den Unterricht finden; obgleich ich eingestehe, daſs eigentlich das Verfahren, wodurch das Differential eines $U = xy$ oben in VI. §. 36. gefunden wurde, auch schon hieher gehört. Selbst auch wenn man für $xy = a$ auf $ydx + xdy = o$ schlieſst, so hat man eigentlich noch unentwickelte Functionen differenziirt. Man erhält dadurch $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, und erst durch die Auflösung der gegebnen Gleichung findet man $y = \frac{a}{x}$, also $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{xx}$.

Vor dem differenziiren die Function y entwickelt, würde man zuvörderst $y = \frac{a}{x}$ erhalten, und, dieses etwa als $y = ax^{-1}$ betrachtet, auf $dy = -ax^{-2}dx$ geschlossen haben, welches dann ebenfalls $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{xx}$ gibt.

Ueberdies muſs man Anfängern anrathen, daſs sie fürs erste nur das Verfahren für Functionen von einer einzigen veränderlichen Gröſse hauptsächlich und ernstlich beachten, und dann ist ihnen dieses gegenwärtige Capitel nur bis hieher zu beachten nöthig; der folgende §. 8. sammt dem folgenden Capitel, erst späterhin.

§. 8. Auch wenn drei Functionen verschiedener Grundgröfsen, wie im $X^2 + 2YZ + A = ZX$, oder noch mehre in einer Gleichung vorkommen, ist es gewifs, dafs auch die Differenzen, folglich auch die werdenden Differentiale, genauen Differentialquotienten und Differentiale der beiden Seiten einander gleich seyn müssen. Denn eine Gleichung zwischen mehrerlei Functionen mufs ja als solche es fordern, dafs sie auch bei allen Gröfsenveränderungen der Functionen bestehend bleibe; und indem durch die Gleichung zwischen den Differenzen der beiden Seiten, Abhängigkeiten der Differenzen von einander bestimmt werden: so sind eben diese Abhängigkeiten zum Bestehen der Gleichung nothwendig, und machen gerade das aus, was man vermittelst der Differenzen- oder Differentialmethode aus der Gleichung wollte geschlossen wissen.

Für die obigen Beispiele war dergleichen Erörterung nicht nöthig, weil ja dort nur 2 verschiedne Functionen in der Gleichung vorkamen, und dann von selbst einleuchtend ist, dafs durch jede Gröfsenänderung der einen, die Gröfsenänderung der andern bestimmt werden mufs.

§. 9. Im Allgemeinen kann man allerdings auch das hier so genannte differenziiren unentwickelter Functionen, als das differenziiren einer Gleichung betrachten; und da nun jede Gleichung als eine algebraische Summe, die $= o$ seyn soll, kann geschrieben werden: so ist das Verfahren ihres differenziirens schon durch die Regel VI. §. 25. mit erwiesen. Und als eine sehr befriedigende Rechtfertigung dieser Regel selbst, wollen wir nunmehr noch folgendes hinzufügen.

Wenn für die Gleichung $X + Y + Z + A = o$, der belegte Zustand ihrer veränderlichen Glieder,

$X + \Delta X + Y + \Delta Y + Z + \Delta Z$ ist, so müssen doch, es mögen die Belegungen ΔX und ΔY und ΔZ unmittelbare Belegungen der X, Y und Z selbst seyn, oder durch Belegungen der Grundgröfsen x, y und z als Functionsdifferenzen bewirkt seyn sollen, allemal ΔX und X, desgleichen ΔY und Y, auch ΔZ und Z einander gleichartige Gröfsen ausmachen, folglich auch $X + \Delta X$, desgleichen $Y + \Delta Y$ und auch $Z + \Delta Z$ schon unter den veränderlichen Werthen des X, Y und Z mit vorkommen, für deren Gesammtheit die Gleichung $X + Y + Z + A = o$ schon gegeben ist, von welcher also die Gleichung $X + \Delta X + Y + \Delta Y + Z + \Delta Z + A = o$ nur einen oder den andern Fall ausmacht.

Die unbelegte Gleichung von der belegten abgezogen, giebt uns nun sehr deutlich den Lehrsatz $\Delta X + \Delta Y + \Delta Z = o$.

2.

Vom partiellen differenziiren.

§. 10. Es ist $^{x}d.\ XYZ = YZ\,dX$, wenn ^{x}d bedeutet, dafs so eben nur X', eine Function des x, als differenziirbar, jede der beiden übrigen Gröfsen Y und Z aber, ob sie gleich ebenfalls zwei veränderliche Gröfse (beispielweise hier ebenfalls zwei Factoren) der vorgegebnen Function XYZ ausmachen, doch für jetzt als zwei unveränderliche Gröfsen sollen behandelt werden.

Eben so ist dann $^{y}d.\ XYZ = XZ\,dY$
und eben so auch $^{z}d.\ XYZ = XY\,dZ$ zu verstehen.

§. 11. Die Summe aus diesen drei partiellen Differentialen giebt das gesammte Gröfsendifferential $d.\ XYZ = YZ\,dX + XZ\,dY + XY\,dZ$ gerade

eben so, wie es auch durch unmittelbare Anwendung der Regel VI. §. 31. würde gefunden seyn.

§. 12. Der Kürze wegen $XYZ = U$ genannt, werden nun auch

$$\frac{{}^{x}dU}{dx} = YZ\,\frac{dX}{dx};\ \frac{{}^{y}dU}{dy} = XZ\,\frac{dY}{dy} \text{ und } \frac{{}^{z}dU}{dz} = XY\,\frac{dZ}{dz}$$

die drei partiellen Differentialquotienten seyn; da hingegen

$$\frac{dU}{dw} = YZ\,\frac{dX}{dw} + XZ\,\frac{dY}{dw} + XY\,\frac{dZ}{dw}$$

ein Gesammtquotient, oder auch schlechthin genannter Differentialquotient der Function U seyn würde, in der Hoffnung hingeschrieben, dafs man vielleicht sowohl X als Y, und Z als Function des w werde auszudrücken, also auch auf w zu differenziiren, und dadurch die Gröfse der Quotienten $\frac{dX}{dw}$, $\frac{dY}{dw}$ und $\frac{dZ}{dw}$ zu finden wissen. Denn wenn man $X = W$ gefunden, nämlich X als Function des w ausgedrückt hätte: so würde auch $\frac{dX}{dw} = \frac{dW}{dw} = \frac{pdw}{dw} = p$ zu finden seyn, u. s. w.

§. 13. Nach Leonhard Euler würde man $\frac{{}^{x}dU}{dx}$ durch $\left(\frac{dU}{dx}\right)$, eben so $\frac{{}^{y}dU}{dy}$ durch $\left(\frac{dU}{dy}\right)$, u. s. w. zu schreiben, also durch die Klammern anzudeuten haben, dafs nur partielle Differentialquotienten zu verstehen seyen; wogegen Lacroix mit Fontaine erinnert, dafs man gerade umgekehrt, durch $\left(\frac{dU}{dx}\right)$ den allgemeinen, und durch $\frac{dU}{dx}$ den partiellen Differentialquotienten andeuten solle, um gerade für diesen letztern, welcher in der neueren Analyse am häufig-

sten gebraucht wird, die bequemste Schreibung zu haben. Demnach mufs dann unser obiges ^{x}dU durch $\frac{dU}{dx}\,dx$, unser obiges ^{y}dU durch $\frac{dU}{dy}\,dy$. geschrieben werden.

§. 14. Wolle man dagegen einen Gesammtquotienten, wie unser obiges $\frac{dU}{dx}$ andeuten, so könne man mit Fontaine $\frac{1}{dx}.dU$, das Gesammtdifferential aber durch d (U) schreiben!

Damit würde aber gerade der einfachste Ausdruck dU als solcher unbrauchbar geworden seyn! Erst als $\frac{dU}{dz}.dz$ geschrieben, wüfste man, dafs er $= {}^{z}dU$ bedeuten solle.

Selbst auch einige französische Mathematiker sind lieber bei der Eulerischen Schreibart geblieben; und für uns Deutsche, die wir in der Integralrechnung nicht durch Surrogate, sondern unmittelbar aus der Form des Differentiales zu schliefsen suchen, müfste der Verlust des dU, und überhaupt jene mühseelige Schreibart der Differentiale viele Unbequemlichkeit verursachen.

§. 15. Aber auch vor der Eulerischen Schreibart scheint mir die Karstensche §. 1., welche auch die Ausdrücke ^{xy}d ; ^{xyz}d gestattet, grofse Vorzüge zu haben.

Gesetzt, ich schreibe $\frac{^{xy}d.XYZ}{dw} = \frac{ZYdX}{dw} + \frac{ZXdY}{dw}$, so liegt vor Augen, dafs in der Function XYZ der Factor Z noch als unveränderlich behandelt werden, die Function nur in Hinsicht ihres X und Y differenziirt werden soll, und dieses mit der Hoffnung geschehe, dafs auch X und Y als Functionen von w dargestellt und differenziirt werden können.

§. 16. Gesetzt, ich habe $U = f(X, Y, Z)$, nämlich U als irgend eine Function von drei veränderlichen Gröfsen (ohne dafs sie gerade, wie die vorige $U = XYZ$, ein Product aus diesen Gröfsen zu seyn braucht), und ich schreibe

$$^{xy}dU = {}^{x}dU + {}^{y}dU$$

oder $dU = (^{xyz}dU =) {}^{x}dU + {}^{y}dU + {}^{z}dU$, so ist nicht nur durchaus verständlich, was damit gesagt seyn soll; sondern es kann auch eben so verständlich daraus gefolgert werden,

dafs $\frac{^{xy}dU}{dw} = \frac{^{x}dU}{dw} + \frac{^{y}dU}{dw}$

und $\frac{dU}{dw} = \frac{^{x}dU}{dw} + \frac{^{y}dU}{dw}$ seyn mufs; nämlich aus jener Summe der Partialdifferentiale auf die Summe dieser Partialquotienten geschlossen werden kann, w. mag seyn, was es will, nur eine dem x, y und z gleichartige Gröfse, und mit der Hoffnung, dafs man die X, Y und U als Functionen der w, wo nicht für alle, doch für einige Fälle, noch werde auszudrücken wissen.

§. 17. $U = f(X, Y, Z)$ geschrieben, heifst, dafs U irgend eine Function der drei veränderlichen Gröfsen X, Y und Z sey, welche selbst auch wieder beliebige Functionen ihrer Grundgröfsen x, y und z seyn mögen.

Hätte man nun ganz allgemein es erwiesen, dafs allemal $^{xyz}dU = {}^{x}dU + {}^{y}dU + {}^{z}dU$ seyn müsse, so wäre man eben dadurch gewifs, dafs man alle Functionen von noch so vielen veränderlichen Gröfsen zu differenziiren wisse, wenn man nur jede Function einer einzigen veränderlichen Gröfse zu differenziiren weifs.

§. 18. Nicht nur pflegt man diese Beweise auf eine, meines Erachtens im Voraus nicht erweisbare

allgemeine Functionsform zu gründen; sondern, da man sich der Unterscheidung zwischen der vollständigen Gröfse und der vollständigen Form der Functionsdifferentiale nicht deutlich bewufst war: so hat man sich die Sache unnöthiger Weise erschwert, und bisweilen zu erweisen gesucht, was doch durch die anerkannten, auch durchaus rathsamen Regeln des Differenziirens als solche nicht geleistet werden kann und soll.

§. 19. Zum Beispiel für die Function $U = X, Y$ haben wir nach VI. §. 33. das formenvollständige Differential

$$dU = YdX + XdY + dXdY$$

und können mit voller Deutlichkeit daraus schliefsen, dafs $\frac{dU}{dX} = Y + X\frac{dY}{dX} + dY$, wegen $dY = o$

also $\frac{dU}{dX} = Y + X\frac{dY}{dX}$, die vollständige Gröfse des Differentialquotienten, und daher

$dU = \left(Y + X\frac{dY}{dX}\right).dX = \left(Y + X\frac{dY}{dX}\right).o$ die vollständige Gröfse dieses Differentials ist. (Verglichen V. §. 6.)

Der Bequemlichkeit wegen pflegt man dieses Differential durch $dU = YdX + XdY$ zu schreiben; und nun liegt es vor Augen, dafs man durch das partielle differenziiren

d. $XY = {}^{x}dXY + {}^{y}dXY$

nur $= YdX + XdY$, nicht aber auch das dritte Glied $dXdY$ finden kann.

§. 20. Ueberhaupt ist es nun, dafs man vermittelst der partiellen Differentiale, nicht das gliedervollständige Gesammtdifferential finden könne, schon dadurch gewifs, weil man die partiellen Differentiale nur solchen Regeln gemäfs darstellt, als wir im vori-

gen Capitel für die algebraischen Functionen gegeben haben, und welche, wo das Gliederdifferential vom Gröfsendifferential verschieden ist, allemal nur das letztere finden lehren. Da auch gerade diese Gröfsendifferentiale zu allem Gebrauche der Differential- und Integralmethode hinreichend und vorzüglich bequem sind; so werden wir für den obigen Satz

$$dU = {}^{x}dU + {}^{y}dU + {}^{z}dU + \ldots$$

zuvörderst zu beweisen haben, dafs durch Befolgung desselben die Gröfse des Gesammtdifferentiales eben so, als durch die Regeln des vorigen Capitels sich ergeben mufs, es mag nun die Function eine Summe, oder ein Product, ein Quotient oder eine Potenz seyn; indem es für Anfänger nützlich seyn wird, zuvörderst diese algebraischen Operationen auch in Hinsicht der partiellen Differenziirung einzeln zu verfolgen.

§. 21. Ist 1) die Function U eine algebraische Summe aus mehren Functionen, z. B. ist $U = X - Y + Z$: so wird durch das partielle differenziiren

$$\begin{aligned} {}^{x}dU &= dX - 0 + 0 \\ {}^{y}dU &= 0 - dY + 0 \\ {}^{z}dU &= 0 - 0 + dZ \text{ gefunden, und daraus} \\ \hline dU &= dX - dY + dZ \text{ geschlossen;} \end{aligned}$$

welches nun offenbar eben das dU ist, welches nach der Regel VI. §. 25. sich ergibt.

§. 22. Ist 2) die vorgegebne U ein Product aus mehren veränderlichen Gröfsen, z. B. $U = XYZ$, so sind die drei Partialdifferentiale

$${}^{x}dU = YZ\,dX$$
$${}^{y}dU = XZ\,dY$$

und ${}^{z}dU = XY\,dZ$, zufolge der Erklärung §. 1., und der Differenziirungsregel VI. §. 13.; ist also ihre Summe völlig übereinstimmend mit

dem $dU = YZ\,dX + XZ\,dY + XY\,dZ$, welches nach der Regel VI. §. 31. gefunden wird.

§. 23. Ist 3) die Function $U = ZN$ ein Quotient veränderlicher Gröfsen, so kann man sie als ein Product $U = Z.\frac{1}{N}$ betrachten, da dann nach dem vorigen §. ihr

Gesammtdifferential $dU = {}^{x}dU + {}^{n}d\frac{1}{N}$

also $= \frac{dZ}{N} + Z.\,d\frac{1}{N}$ seyn mufs.

Dafs auch dieses $= \frac{dZ}{N} - \frac{ZdN}{NN} = \frac{NdZ - ZdN}{NN}$

der Regel VI. §. 44. völlig gemäfs gibt, ist insbesondere durch den Beweis VI. §. 46. schon bekannt.

§. 24. Ist 4) $U^n = [f(X, Y, Z)]^n$ nämlich die Function als Potenz einer Stammgröfse, welche eine beliebige Function von X, Y und Z ist, gegeben; so hat man ja

$d.U^n = nU^{n-1}\,dU = n[f(X, Y, Z)]^{n-1}\,d.\,f\,(X, Y, Z)$

nach Regel VI. §. 54. Und nun ist, dafs $dU = {}^{x}dU + {}^{y}dU + {}^{z}dU$ sey, in §. 20., 21. oder 22. erwiesen, je nachdem und in so fern die Function $U = f(X, Y, Z)$ eine Summe, oder ein Product, oder ein Quotient ist. Und sollte etwa dieses U selbst schon eine bestimmte Potenz seyn, so wäre der Beweis dieses Paragraphen zuvörderst auf sie selbst auch anzuwenden.

§. 25. Wenn 5) eine oder mehre von den veränderlichen Gröfsen, deren Differentiale man verlangt, der eigenthümlich algebraischen Operation, der Formirung der Gleichungswurzeln unterworfen ist, so kann alles, was unser so genanntes differenziiren einer noch unentwickelten Function ausmacht, als das differenziiren einer Gleichung betrachtet werden, wofür

als algebraische Summe $= o$ geschrieben, die Richtigkeit des partiellen Differenziirens durch §. 21. schon einleuchtet.

§. 26. Der allgemeinen Gewohnheit gemäfs habe ich z. B. bei Erklärung des partiellen Differentiales $\partial_x d.XY = YdX$ gesagt, dafs dabei blos X als veränderlich, die andere veränderliche Gröfse Y aber als constant behandelt werde. Richtiger würde es heifsen, dafs dabei blos die eine veränderliche Gröfse schon mit einem Differential belegt, die andere aber noch unbelegt gedacht werde. Denn in der That soll ja auch dem Y seine ganze ihm zuständige Veränderlichkeit verbleiben; und nachher auch in dem andern partiellen Differentiale $\partial_y d.XY = XdY$, soll ja auch die andere Gröfse X, zwar mit einem Differentiale noch nicht belegt, aber so veränderlich bleiben, als sie ihrer Bedeutung nach es seyn kann. Wie könnte sonst von der Summe beider partiellen Differentiale $= YdX + XdY$ behauptet werden, dafs sie das Differential des XY ausmache, in welchem X und Y veränderlich seyn sollen!

§. 27. Allerdings wird man sich diese Behauptung bei jenen gewöhnlichen Redensarten dadurch gerechtfertigt denken, dafs man dem y jeden beliebigen constanten Werth, folglich auch jeden von denjenigen Werthen, die seiner Bedeutung nach ihm möglich sind, beigelegt denken, und es dadurch in seine ganze Veränderlichkeit wieder eingesetzt werden kann; indessen kann man diesen Umweg ersparen, auch netter und deutlicher immerfort die völlige Wahrheit vor Augen behalten, wenn man blofs zwischen noch unbelegtem veränderlichen Y, und dem bereits belegten veränderlichen $Y^1 = Y + dY$ zu unterscheiden verlangt.

§. 28. Nach diesen, der Wahrheit durchaus angemessenen Vorstellungen, liegt es uns vor Augen, dafs für jede Function

$$U = f(X, Y, Z \ldots),$$

nachdem sie $^{x}dU = f(dX, Y, Z \ldots)$

ferner $^{y}dU = f(X, dY, Z \ldots)$

ferner $^{z}dU = f(X, Y, dZ \ldots)$ gegeben,

nämlich ^{x}dU, als eine Function des dX und aller ihrer übrigen veränderlichen unbelegten Gröfsen, eben so ^{y}dU, als eine Function des dY und aller ihrer übrigen veränderlichen unbelegten Gröfsen u. s. w. gegeben hat, die Summe ihrer partiellen Differentiale alles das enthalten mufs, was das gliedervollständige Gesammtdifferential $dU = \begin{cases} f(X+dX, Y+dY, Z+dZ, \ldots \\ -f(X, Y, Z \ldots) \end{cases}$ enthalten würde; mit Ausschlufs jeden solchen Gliedes, welches eine Function von mehr als einer unendlichkleinen Gröfse wäre (indem wir uns bisher unter den sämmtlichen Differentialen dX, dY ... noch werdende Differentiale 'dX, 'dY ... mögen gedacht haben); denn die in der Summe der partiellen Differentiale enthaltenen Glieder machen nur solche Functionen $P.dX + Q dY + R dZ$ aus, welche theils wegen $dX = o$, theils wegen $dY = o$, u. s. w. ein $= (P + Q + R).o$, nämlich die Gröfse des Gesammtdifferentiales als eine $(P+Q+R)$ malige o angeben.

Das gliedervollständige Differential würde allerdings für diese Gröfse nichts anders lehren können, als dafs sie eine $(P+Q+R+o+o.o+o.o.o)$ malige o seye; indessen ist es gut zu wissen, dafs vermittelst der partiellen Differentiale dergleichen, zur Gröfsen-Bestimmung der Differentialquotienten überflüssige Glieder gar nicht mit gefunden werden.

§. 29. Auch wenn X oder Y..., in der Function U, eine trigonometrische, oder logarithmische, oder expo-

nentiale Function wäre, werden wir niemals mit solchen zur Gröfsenbestimmung nichts helfenden Gliedern es zu thun haben, weil auch diejenigen Regeln, welche zur bequemen Differenziirung dieser Functionen befolgt werden, sämmtlich nur die Gröfse des Functionsdifferentiales finden lehren, wo diese von der gliedervollständigen Form desselben verschieden ist.

§. 30. Und da wir, falls auch $U = f(X, Y, Z)$ als eine Function von mehren veränderlichen Gröfsen selbst schon eine transcendente Function wäre. Doch zuvörderst nur die Gröfse ihres Differentiales zu erhalten verlangen: so werden wir es nun benutzen, dafs diese Gröfse vermittelst der partiellen Differentiale allemal gefunden werden kann, und wir daher nur nöthig haben, das differenziiren solcher Functionen für eine einzige veränderliche Gröfse zu lehren. Zugleich aber wird man es nunmehr billigen, dafs ich bei einigen algebraischen Functionen auch unmittelbar das gliedervollständige Differential finden lehrte. Dafs dann mittelbar selbst auch aus der blofsen Gröfsen der Differentiale die gliedervollständigen hergestellt werden können, wird späterhin dargethan werden, nachdem wir auch mit den so genannten höhern Differentialen werden bekannt geworden seyn.

3.

Differenziirung durch Substitution.

§. 31. Was man darunter verstehe, ist durch VI. §. 48. schon vorläufig bekannt geworden. Für algebraische Functionen genügt es, nur ein par Beispiele aufzuführen:

I.) Sey $u = \frac{x}{x + \sqrt{(1 + x^2)}}$ gegeben, so hat man

durch die Substitution $N = x + \sqrt{(1+x^2)}$, den einfachern Ausdruck $u = \frac{x}{N}$,

und dafür $du = \frac{N.dx - x.dN}{NN}$ (VI. §. 55. Regel V.).

Da wir nun $dN = dx + \frac{x.dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$ nach den dahin gehörigen Regeln des eben citirten VI. §. 55. zu finden wissen: so erhalten wir

$$du = \frac{(x+\sqrt{[1+x^2]})\,dx - x\left(1+\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}\right)dx}{(x+\sqrt{[1+x^2]})^2}$$

auch $= \frac{(1+2x^2)\,dx}{\sqrt{(1+x^2)}} - 2x\,dx$

Etwas leichter wird dieses du gefunden, wenn man zuvor den Zähler und Nenner des u durch $\sqrt{(1+x^2)} - x$ multiplicirt. Denn da man hierdurch $u = \sqrt{(x^2+x^4-x^2)}$ erhält: so hat man

$$du = d.(x^2+x^4)^{\frac{1}{2}} - d.x^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+4x^3}{\sqrt{(x^2+x^4}}\,dx - 2x\,dx$$

$$= \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1+x^2}}\,dx - 2x.\,dx$$

II.) Sey $u = \frac{x - x\sqrt[3]{x^2}}{a - a\sqrt[3]{x}}$ gegeben, so hat man durch Substitution $u = \frac{Z}{N}$,

$$du = \frac{N.dZ - Z.dN}{NN} \text{ und } dZ = dx - \frac{5dx}{3}\sqrt[3]{x^2},$$

$$dN = -\frac{a.dx}{3\sqrt[3]{x^2}}, \text{ welches}$$

$$du = \frac{(a - a\sqrt[3]{x})\left(1 - \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}\,dx + \frac{a(x - x\sqrt[3]{x^2})\,dx}{3\sqrt[3]{x^2}}\right.}{(a - a\sqrt[3]{x})^2}$$

also $du = \frac{dx}{a} + \frac{4dx}{3.a}\sqrt[3]{x}$ gibt.

Bedenkt man bei diesem vorgegebenen u, dafs sich Zähler und Nenner durch $1 - \sqrt[5]{x}$ dividiren läfst: so erhält man dadurch

$$u = \frac{x + x\sqrt[3]{x}}{a}, \text{ also } du = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\right) dx.$$

Sehr merkwürdige Beispiele von glücklich gewählten Substitutionen und Umformungen der Function werden bei den transcendenten Functionen anzuführen seyn.

Achtes Capitel.

Zweite und noch höhere Differentialquotienten.

§. 1. Sey Beispielweise $y = x^3$, so würde das werdende Functionsdifferential

$$'dy = 3x^2\,'dx + 3x\,'dx^2 + 'dx^3 \text{ seyn.}$$

Da dieses selbst noch x in sich hat, selbst noch eine Function von x ist: so kann es als solche aufs neue differenziirt werden, und würde, wenn 1) sein dx, sein Differential der Gründgröfse, als eine constante Gröfse behandelt wird, das zweite werdende Differential

$$\begin{aligned} '{}'dy &= 3\,'dx.\,'d.\,x^2 + 3\,'dx^2.\,'dx + 0 \\ &= 3\,dx(2x\,dx + dx^2) + 3\,dx^2\,dx \end{aligned}$$

folglich auch $= 6x\,dx^2 + 6\,dx^3$ geben, indem hier allemal 2) auch gefordert wird, dafs auch das zur zweiten Differenziirung gebrauchte dx, dem bei der ersten Differenziirung gebrauchten völlig gleich gedacht werde; das heifst, nicht nur jedes dx in seiner ersten angelegten unendlich kleinen Gröfse, jedem

übrigen gleich unendlich klein angelegt, sondern auch in jedem Zeitpuncte der Annäherung an $= 0$, jedes dx dem andern gleichseyend gefordert werde, woraus denn folgt, dafs sie auch gleichzeitig sich vernullend seyn müssen.

Eben dieses beides auch für die fernere dritte Differenziirung vorausgesetzt, würde man das dritte werdende Differential $d\,d\,dy = 6\,dx^3$ erhalten.

§. 2. Da wir aber für die Resultate der Differentialrechnung nur der Gröfse der genauen Differentialquotienten, auch für die Integralrechnung nur der durch diese genauen Quotienten bestimmten genauen Gröfsen der Differentiale mit vernullten dx bedürfen: so ist es genügend, und übrigens ungleich bequemer, auf folgende Weise zu verfahren.

Sey wie vorhin, $y = x^3$, so ist der erste genaue Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = 3x^2$. Dieser aufs neue differenziirt gibt $d\frac{dy}{dx} = 6x\,dx$, also den zweiten Quotienten $\frac{ddy}{dx\,dx} = 6x$. Dieser aufs neue differenziirt gibt $d\frac{ddy}{dx\,dx} = 6\,dx$, also den dritten Quotienten $\frac{dddy}{dx\,dx\,dx} = 6$; welcher nun in der constanten Zahl 6 besteht, also nicht weiter differenziirt werden kann.

Anmerkung.

§. 3. Das zweite Differential $d\frac{dy}{dx} = 6x\,dx$, durch dx dividirt, mufs zuvörderst $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = 6x$ geben. Da aber die dx constant und sämmtlich einander gleich

gefordert sind (§. 1.) so muſs allerdings $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{\frac{ddy}{dx}}{dx}$ $= \frac{ddy}{dx\,dx}$ seyn.

Eben so ist auch das $\frac{dddy}{dxdxdx}$ zu erklären; und zu noch gröſserer Bequemlichkeit wird auch $\frac{ddy}{dxdx}$ durch $\frac{d^2y}{dx^2}$, und $\frac{dddy}{dxdxdx}$ durch $\frac{d^3y}{dy^3}$ geschrieben; welches denn auch $\frac{d^ry}{dx^r}$ als einen bequemen und deutlichen Ausdruck für den r^{ten} Differentialquotienten an die Hand gibt.

§. 4. Sey z. B. $y = x^n$, so hat man $\frac{dy}{dx}$ $= nx^{n-1}$, folglich $\frac{ddy}{dx^2} = n.n-1.\,x^{n-2}$, folglich $\frac{d^3y}{dx^3}$ $= n.n-1.\,n-2.\,x^{n-3}$; überhaupt den r ten Differentialquotienten $\frac{d^ry}{dx_r} = n.n-1.\ldots.,n-(r-1).x^{n-r}$ für jede bejahte und ganze Zahl r; und mit andern als solchen ganzen Stufen der Differentialquotienten werden wir es hier nicht zu thun haben.

§. 5. Wenn daher im vorgegebenen $y = x^n$ auch n irgend eine bejahte ganze Zahl r ist, so muſs der rte Differentialquotient $\frac{d^r.\,X^r}{dx^r} = r.r-1.\ldots..2.1.x^0$ aus zwei Gründen der letzte seyn, indem nicht nur sogleich der nächstfolgende numerische Coefficient hinter 2. 1 auch den Factor $r-r = 0$ erhalten müſste, sondern auch $x^{r-r} = x^0$ hier $= 1$, und somit eine beständige, nicht weiter differenziirbare Gröſse ist; hier nämlich, wo wir nur algebraische Functionen voraussetzen, also von jedem gegebenen Dignitätsexponenten n und r vorausgesetzt haben, daſs er eine unver-

änderliche Gröfse bedeuten soll, folglich auch $r-z$; $r-2$ u. dergl. ebenfalls unveränderliche Gröfsen seyn müssen, und daher auch $n-r=o$ als ein einzelner Werthfall unter lauter unveränderlichen Gröfsen sich ergeben mufs; welches freilich nicht mehr der Fall ist, wenn der Exponent n, oder statt seiner dann lieber z geschrieben, der Exponent z eine veränderliche Gröfse wäre, und während dieser ihrer Veränderungen ein $x^{z-r}=x^o$ entstünde; wo nunmehr auch die x^o in die Reihe veränderlicher x^z gehört, und als solche nachher bei den transcendenten Functionen zu behandeln seyn wird.

§. 6. Aufser der gewöhnlichen Binomialreihe, ist in Voreinner. V. §, 5. noch eine zweite, eben so allgemein aufgeführt, welche auf $y=x^n$ angewandt, $\frac{dy}{dx}=n\frac{x^n}{x}$ als den genauen Differentialquotienten für $dx=o$ geworden, angibt. (VI. §. 7.)

Da nun $n.\frac{x^n}{x}=nx^{n-1}$ ist, also dieser erste Differentialquotient vermittelst dieser IIten Binomialreihe sich eben so, wie vermittelst der ersten ergibt, und daher auch die zweiten und noch höheren sich eben so, wie vorhin in §. 4. ergeben müssen: so kann durch diese IIte Binomialreihe für die genauen Differentialquotienten unmittelbar allerdings nichts gefunden werden, was man nicht schon durch die Ite gewöhnliche Reihe zu finden wüfste; obgleich in Hinsicht des werdenden Differentials, also auch des werdenden Differentialquotienten, diese IIte Reihe mit dem rten Gliede sich beendigt, wenn $n=-r$, nämlich als eine ganze verneinte Zahl gegeben ist.

§. 7. Sey y eine Function des x, welche es wolle. Wenn man $\frac{dy}{dx}=p$, dann auch $\frac{dp}{dx}=q$, fer-

ner $\frac{dq}{dx} = r$ und $\frac{dr}{dx} = s$, u. s. w., zu finden weifs, so lange p, q, r, s ... selbst noch Functionen von x sind; wenn man also den ersten Differentialquotienten von allen diesen Functionen zu finden weifs: so weifs man auch alle höheren der vorgegebenen Function y zu finden.

Denn indem $\frac{dy}{dx} = p$ gefunden ist,

so folgt $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q$; dann

ferner $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{ddp}{dx^2} = \frac{dq}{dx} = r$

ferner $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^3p}{dx^3} = \frac{d^2q}{dx^2} = \frac{dr}{dx} = s$

und wenn nun s kein veränderliches x mehr enthält, sondern nur noch etwa das constante $x^0 = 1$ darin vorkommt, so ist dieser Differentialquotient der letzte, und alle folgenden sind $= 0$.

§. 8. Dieser Gebrauch der Buchstaben p, q, r, s in dieser Ordnung ist so gewöhnlich geworden, daſs ich schon oben (V. §. 1.) die Reihe $dy = pdx + Qdx^2 + Rdx^3 + Sdx^4 \ldots$ als eine wahrscheinlich ganz allgemeine Form für jedes noch werdende erste Differential einer jeden x Function y, nur in ihrem ersten Gliede schon vermittelst des kleinen p ausgedrückt, in den nachfolgenden Gliedern lieber die groſsen Buchstaben Q, R, S, gebraucht habe. Späterhin wird der wichtigste Satz erwiesen werden, daſs $Q = \frac{1}{1.2} q = \frac{1}{2} \frac{ddy}{dx^2}$; $R = \frac{1}{1.2.3} r = \frac{1}{1.2.3} \frac{d^3y}{dx^3} \ldots$ ist.

§. 9. Da wir für jede algebraische Function ihr erstes Differential durch die Regeln des VIten Capitels zu finden wissen, aus diesen Regeln aber ein-

leuchtet, dafs der erste Differentialquotient keine andere als wiederum algebraische Function seyn kann, folglich auch der zweite Differentialquotient wiederum eine algebraische Function, und nach schon bekannten Regeln zu differenziiren ist; so erhellet, dafs wir für jede algebraische Function y jeden für sie vorhandenen rten Differentialquotienten $\frac{d^r y}{dx}$ zu finden wissen.

Sey er $= \mathfrak{X}$ gefunden, so ist das rte Differential $d^r y = \mathfrak{X} . dx$, es mag nun $\mathfrak{X}$ noch eine wirkliche Function des x seyn, oder als Scheinfunction nur noch eine von der Veränderlichkeit des x unabhängige $x^0 = 1$ enthalten, und in so fern eine constante Gröfse seyn.

§. 10. Ist aber y eine transcendente Function des x (z. B. $y = \sin \text{arc } x$) so kann ihr erster Differentialquotient eine andere transcendente Function seyn (wie hier $\frac{dy}{d \text{ arc } x} = \cos \text{in arc } x$ im folgenden Capitel sich ergeben wird), und so mufs man auch vom cos arc x das erste Differential zu finden wissen, um das zweite Differential des sin arc x angeben zu können. Demnach wird man auch bei den Differenziirungsregeln der transcendenten Functionen in Hinsicht ihrer höheren Differentiale nur darauf zu achten haben, dafs man für alle dabei nöthig werdenden Functionen deren erste Differentiale zu finden lehre.

Obgleich allerdings bisweilen es zu benutzen ist, dafs z. B. Sinus und Cosinus und überhaupt alle trigonometrischen geradlinigen Functionen einander algebraisch functionirt sind, z. B. $\cos \text{arc } \varphi = \sqrt{(1.1 - [\sin \text{arc } \varphi]^2)}$ ist, also $\sin \text{arc } \varphi = x$ genannt, $\cos \text{arc } \varphi = (1.1 - xx)^{\frac{1}{2}}$ ist, also die höheren Differentiale nun sämmtlich durch algebraische Differenziirung können gefunden werden: so wird man doch

meistens weit einfachere Formen gewinnen, wenn man im transcendenten differenziiren fortfährt.

§. 11. Auch von Functionen mehrer Variabeln werden wir ihrer höheren Differentialquotienten allerdings nöthig haben.

Sey z. B. $u = xy$, so ist $du = y\,dx + x\,dy$, und wenn x als Grundgröfse der Function u betrachtet werden kann und soll: so hat man den ersten Differentialquotienten $\frac{du}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$.

Obgleich nun der Werth des $\frac{dy}{dx}$ nicht eher angegeben werden kann, als bis man auch y als Function des x gegeben hat, und ebenfalls auf x zu differenziiren weifs: so kann man doch vorläufig für das fernere differenziiren andeuten, dafs der zweite Differentialquotient

$$\frac{ddu}{dxdx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dx\,dy}{dx\,dx} + x\frac{ddy}{dxdx} = 2\frac{dy}{dx} + x\frac{ddy}{dx^2}$$

und der dritte $\frac{d^3u}{dx^3} = 2\frac{ddy}{dxdx} + \frac{dx}{dx}\frac{ddy}{dx^2} + x\frac{d.ddy}{dxdx^2}$

$= 3.\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{d^3y}{dx^3}$ seyn müsse; denn diese Ausdrücke ergeben sich, wenn man d. $\frac{du}{dx}$ findet, und durch dx dividirt, um $\frac{d\,dx}{dxdx}$ zu erhalten; u. s. w.

Gesetzt nun, man habe sich überzeugt, dafs, zwar nicht allgemein, doch etwa für einige Fälle, $y = ax^2$ können geachtet werden: so wüfste man sogleich, dafs für diese Fälle $\frac{dy}{dx} = 2ax$, folglich $\frac{ddy}{dx^2} = 2a$, daher schon $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ und demnach $\frac{d^3u}{dx^3} = 3.2.a = 6.a$, also schon constant seyn mufs.

§. 12. Sey $P = QR$ und von Q und R bekannt, dafs es Functionen von x sind, so hat man

$$\frac{dP}{dx} = R\frac{dQ}{dx} + Q\frac{dR}{dx}$$

$$\frac{ddP}{dx^2} = R\frac{d^2Q}{dx^2} + 2\frac{dRdQ}{dx.dx} + Q\frac{d^2R}{dx^2}$$

$$\frac{d^3P}{dx^3} = R\frac{d^3Q}{dx^3} + 3\frac{dRd^2Q}{dx\,dx^2} + 3\frac{d^2R\,dQ}{dx^2\,dx} + \frac{d^3R}{dx^3}$$

Die numerischen Coefficienten in diesem Differentialquotienten

sind 1 1

dann 1 2 1

dann 1 3 3 1

welches schon überflüssig ist, um durch allgemeine Inducirung zu schliefsen; dafs im nten Differentialquotienten diese numerischen Coefficienten völlig wie im Binomialtheoreme sich ergeben müssen, und der nte Differentialquotient

$$\frac{d^nP}{dx} = \frac{Rd^nQ}{dx^n} + n\frac{dRd^{n-1}Q}{dx\,dx^{n-1}} + \frac{n.n-1.}{1.2}\frac{d^2R}{dx^2}\frac{d^{n-2}Q}{dx^{n-2}}$$

u. s. w. seyn mufs.

§. 13. Mehr dergleichen allgemeine Formeln für andere Functionen von zwei Variabeln, oder sogar von drei und mehren Variabeln im Voraus aufzuführen, halte ich nicht rathsam. Es ist besser, dergleichen nach und nach zu verfertigen, wo man ihrer bedarf, und für das jedesmalige Bedürfnifs zweckmäfsig sie zu verfertigen veranlafst ist, auch durch ihre Anwendung sie sogleich richtig verstehen lernt.

Neuntes Capitel.

Differenziirung der nöthigsten Kreisfunctionen.

§. 1. Durch A, als den Anfangspunct eines Kreisbogens AB (Fig. 9.) den Durchmesser AD gezogen, und von demselben aus diejenige Normale EB errichtet, welche des Bogens Endpunct B trifft, ist der Sinus des Bogens AB. Mit veränderlichem Bogen $AB = \varphi$, mufs auch dessen Sinus $EB = s$ sich ändern, daher die beiden Gröfsen φ und s einander functionirt sind.

Indem aber $\pi = 3,14$ u.s.w. die Länge des Halbkreises für den Halbmesser $= 1$ angibt, und fernerhin $AB = \varphi$ nur den kürzesten unter denen mehren Bogen bedeutet, die in A ihren Anfang, in B ihr Ende, und deshalb, der obigen Erklärung gemäfs, ebenfalls dieselbe Linie EB zum Sinus haben: so sind diese übrigen Bogen aufser φ

auch $2\pi + \varphi$; $4\pi + \varphi$; $6\pi + \varphi$; $8\pi + \varphi$; u.s.w. ohn Ende,

überdies auch $-2\pi + \varphi$; $-4\pi + \varphi$; $-6\pi + \varphi$; $-8\pi + \varphi$ u.s.w. ohn Ende.

Da ferner der bejahte Sinus $EB = +s$ eben so grofs auch im zweiten Quadranten, als $FG = EB = +s$ vorkommt, und diesem Sinus

die Bogen $\pi - \varphi$; $3\pi - \varphi$; $5\pi - \varphi$ u.s.w. ohn Ende,

und überdies auch $-\pi - \varphi$; $-3\pi - \varphi$; $-5\pi - \varphi$; u.s.w. ohn Ende

zugehören: so erhellet, dafs jedem Sinus s unendlich viele Bogen zugehören, und daher eine algebraische Gleichung

$$\varphi^n + A\varphi^{n-1} + B\varphi^{n-2} + \ldots - s = 0$$

welche die unendlich vielen, einem gegebnen s zuge-

hörigen Bogen Φ als ihre Gleichungswurzeln bestimmen sollte, ein $n = \infty$ haben müfste; also diese Bestimmung die Kräfte der Algebra übersteigt.

§. 2. Gleichwohl dürfte diese, durch die unendliche Anzahl des Bogens entstehende Transcendenz für die Praxis können beseitigt werden. Denn sey nur erst für den kürzesten Bogen φ eine Gleichung zwischen ihm und seinem Sinus s gefunden: so wüfste man ja, dafs eben der Sinus auch jedem von den unendlich vielen Bogen φ zugehöre, von welchen keiner um ein gebrochenes $\mp\pi$ vom kürzesten φ verschieden ist.

§. 3. Allerdings aber ist es nun auch in Hinsicht des kürzesten Bogens φ der Fall, dafs man z. B. vermittelst des pythagorischen Lehrsatzes, den Sinus als halbe Sehne behandelt, überführt wird, durch einen ohn Ende fortgesetzte Quadratwurzelziehung dem Bogen sich immerfort zu nähern, ohne ihn je zu erreichen. Auch durch alle übrigen bisher versuchten und versuchbaren Methoden hat man ebenfalls nur Reihen zu finden vermocht, welche die Bogenlänge immer genauer und genauer angeben müssen, ohne sie jemals genau zu erreichen, z. B.

$$\varphi = s + \frac{1.s^3}{2.3} + \frac{1.3.s^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.s^7}{2.4.6.7} + \ldots\ldots$$

§. 4. Indessen braucht auch diese Transcendenz uns für die Praxis keine Sorge zu machen. Gesetzt sogar, dafs es noch irgend einmal gelinge, zwischen Sehne und Bogen, also auch Sinus und Bogen, eine ganz genaue algebraische Gleichung zu finden: so würde ihr Ausdruck so beschaffen seyn müssen, dafs man ungleich lieber nach den schon gefundenen Reihen annähernd rechnen würde. Sogar bei vielen andern solchen Functionen, die man ursprünglich ganz

genau auszudrücken veranlafst ist, pflegt man sich umzusehen, wie man sie in solche Reihen auflösen könne, die eine bequeme Berechnung gestatten. Ueberdies aber sind für die nöthigen Kreisfunctionen so viel einzele Fälle schon berechnet, und so tabellarisch vollständig geordnet, dafs man mit diesen transcendenten Kreisfunctionen viel bequemer und zuverlässiger als mit manchen anderweitigen nicht transcendenten zu rechnen pflegt. Namentlich findet man auch in den hieher gehörigen trigonometrischen Tafeln die Bogenlänge φ für so viel Grade, Minuten und Secunden aufgeführt, dafs man daraus z.B. die Bogenlänge

für $170° = 2,967059$
für $8° = 0,139626$
für $57' = 0,016580$
für $9'' = 0,000043$ abnehmen und somit
für $178°57'9'' = 3,123308$ finden kann, unter der Voraussetzung, wie man zu sagen pflegt, dafs der Halbmesser $= 1$ sey.

Da nun aus den Sinustafeln ebenfalls für solche Grade, Minuten u.s.w. die Sinuslänge abzunehmen ist: so erhellet von selbst, wie man vermittelst beider Tafeln für jede gegebne Bogenlänge die Sinuslänge, und umgekehrt für jede mögliche Sinuslänge s die ihr zugehörige Bogenlänge φ, als schon berechnet vorfinden, und demnach bei jeder analytischen Vergleichung, mit gegebnem φ oder s, auch s oder φ, als mit gegeben betrachten kann.

§. 5. So wie die Functionirung zwischen Bogen und Sinus transcendent, das heifst, die genaue Vergleichung zwischen beiden Gröfsen die Kräfte der algebraischen Operationen übersteigend ist; so mufs auch zwischen Bogen und jeder andern von den übrigen sieben geradlinigen trigonometrischen Hülfsgrössen die Functionirung eben deshalb transcendent seyn,

weil alle diese 8 Hülfslinien unter einander algebraisch vergleichbar sind; die 6 ersten durch blofse Quadratwurzelziehung, weil sie ja unter einander wie die Seiten rechtwinkliger Dreiecke sich verhalten; und Sinus versus oder Cosinus versus als algebraische Summe aus dem Halbmesser 1 und der Gegengröfse des Cosinus oder Sinus.

§. 6. Sey R die Länge eines Halbmessers, welche sie wolle, und $R = r.1$, indem diese absichtlich hier ausgezeichnet grofs geschriebene 1, irgend eine lineäre Einheit, und r den Verhältnifs-Exponenten $\frac{R}{1}$ bedeutet: so wird man für einen veränderlichen Winkel f, die während seiner Veränderlichkeit ihm zugehörigen veränderlichen

Bogen- Sinus- Cosinus- Tangenten-Längen, ...

durch $\operatorname{arc}\varphi.1$; $\sin\varphi.1$; $\cos\varphi.1$; $\operatorname{tang}\varphi 1$; u. s. w. für den mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreis, und dagegen

durch $\operatorname{arc}\varphi.R$; $\sin\varphi.R$; $\cos\varphi.R$; $\operatorname{tang}\varphi.R$, u. s. w. für den mit dem Halbmesser R beschriebenen Kreis ausgedrückt haben, wenn man sich unter den Ausdrücken $\operatorname{arc}\varphi$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ u. s. w. nicht mehr Linien dem Halbmesser 1 zugehörig, sondern nur diejenigen Zahlen denkt, welche zu ihrer eignen Zahleinheit sich eben so wie die Längen

$\operatorname{arc}\varphi.1$; $\sin\varphi 1$ etc. zu ihrer Einheit 1, folglich auch wie die $\operatorname{arc}\varphi.R$; $\sin\varphi.R$ etc. zu ihrem Halbmesser R sich verhalten.

(Dieses Folglich, und noch manche fernere Folgerung, wird auch dem Anfänger eben dadurch einleuchtend seyn, dafs wir ihm für die veränderliche Bogenlänge, auch einen veränderlichen Winkel f vorgeführt haben, der in jedem einzelen Werthfalle seiner Veränderlichkeit jedesmal mit seinen beiden unendlichen Schenkeln alle Kreise gleichzeitig durchschneidet, sie mögen mit dem Halbmesser 1 oder irgend einem andern Halbmesser R beschrieben seyn.)

§. 7. Wen wir uns z. B, in der bekannten Gleichung $\cos\varphi.1 = \Gamma(1.1 - \sin\varphi.1.\sin\varphi 1.)$
oder $\cos\varphi.R = \Gamma(RR - \sin\varphi.R.\sin\varphi.R)$,
beide Seiten durch den lineären Halbmesser, er sey 1 oder R, dividirt fordern: so erhalten wir die Zahlengleichung $\cos\varphi = \Gamma(1.1 - \sin\varphi\sin\varphi)$, in welcher nun irgend eine lineäre Einheit nicht mehr vorkommt.

Da demnach auch das 1.1 in derselben, nicht mehr das Quadrat einer Linie 1, sondern nur das Zahlenproduct $1.1 = 1$ bedeutet: so haben die neueren Analysten nicht Unrecht, wenn sie diese Gleichung nur $\cos\varphi = \Gamma(1 - \sin\varphi\sin\varphi)$ schreiben; auch z. B. statt der Gleichungen

$$\frac{(R\cos\varphi)^2}{RR} = \frac{RR}{(R\sec\varphi)^2} = \frac{RR}{RR + R\,\mathrm{tang}\,\varphi.\,R\,\mathrm{tang}\,\varphi}$$

nur die von der Gröfse des R unabhängigen Zahlengleichung $\cos\varphi^2 = \frac{1}{\sec\varphi^2} = \frac{1}{1+\mathrm{tang}\,\varphi^2}$ behandeln.*)

---

*) Allerdings werden wir den jetzt gewöhnlichen, auch in vieler Hinsicht netten Gebrauch solcher Zahlengleichungen fernerhin im Auge behalten, und zu rechter Zeit selbst befolgen. Wer zu früh den blofsen Zahlenwerthen sich überläfst, nicht auch sie geometrisch sich darzustellen weifs, wird namentlich in ihrer Anwendung auf technische Wissenschaften arge Fehler begehen können. Nicht einmal die so treffliche Prüfung einer Gleichung vermittelst ihrer dimensorischen Richtigkeit (Vorerinner. VI.) steht ihm zu Gebote. Wenn eine trigonometrische Function noch andere veränderliche Gröfsen enthält: so mufs man doch zu entscheiden wissen, welche von ihnen etwa den Halbmesser abgeben kann, und eben deshalb für alle veränderliche Winkel im Kreise als constant zu behandeln sey! Der teutsche Lehrling wird auch solche achtungswerthe teutsche Mathematiker zu benutzen haben, welche allerdings noch zu ängstlich geometrisch zu schliefsen suchen; der Engländer und vollends

§. 8. Bei der nunmehr folgenden sorgfältigen Begründung der trigonometrischen Differentialformeln aber werden wir die Einheiten gerade in der Maafse vollständig mit aufführen, dafs man sich in jeder Formel unter den Ausdrücken arc φ, sin φ, cos φ u. s. w. nach Belieben entweder die Länge denken kann, welche diesen trigonometrischen Functionen, in einem mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreise, für einen veränderlichen Winkel f zukommen würden, oder auch die diesen Linien proportionalen Zahlwerthe sich vorstellen kann; so dafs man unter jeder in den Formeln aufgeführten 1, in dem ersten Falle die lineäre, in dem andern Falle blofs die Zahleneinheit der Zahlen φ, sin φ, cos φ u. s. w. sich zu denken hat, welche man für jeden einzelen Werth des veränderlichen Winkels f, nach Graden, Minuten, Secunden etc. ausgedrückt, in den trigonometrischen Tafeln vorfinden kann. Kaum brauche ich es zu erinnern, dafs man, wo Grade und Minuten u. s. w. genannt werden, sowohl Grad- und Minuten-Bogen, als Grad- und Minuten-Winkel darunter verstehen kann; weil beides einander proportionale Maafse sind.

§. 9. Der nächsten uns bevorstehenden Anwendung der trigonometrischen Differentialquotienten angemessen, und auch aus andern Gründen rathsam, wollen wir uns zuvörderst den Bogen φ als die Grundgröfse, und dagegen die demselben zugehörige trigonometrische Hülfslinie, es mag nun Sinus oder Cosinus, Tangente oder Cotangente u. s. w. seyn, als eine Function des veränderlichen Bogens denken, deren Differenzen oder Differentiale durch das dem φ zugelegte $\triangle\varphi$ oder $d\varphi$ bewirkt werden.

der Italiener zu geschweigen, von welchen besonders die letztern, zur Zeit ihrer berühmten Wasserbaumeister, auch durch Bilder der höhern Geometrie sich auszudrücken suchten.

Die Ausdrücke $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, u. s. w. bedeuten allerdings den Sinus, Cosinus u. s. w. eines veränderlichen Winkels, dessen Gradzahlen etwa nach Graden oder Minuten u. s. w. $= \varphi$ gedacht werden; indessen wird alles anschaulicher, wenn man sich unter φ den Bogen vorstellt, der mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben, den veränderlichen Winkel f bespannt, also mit ihm veränderlich, und sogar ihm proportional veränderlich ist; daher wir uns unter den Ausdrücken $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, u. s. w. immerhin vorstellen wollen, dafs sie den Sinus, Cosinus u. s. w. des Bogens φ bedeuten. Es wäre hier zu mühsam, immerfort $\sin \operatorname{arc}\varphi$, $\cos \operatorname{arc}\varphi$, u. s. w. zu schreiben, obgleich es in der Folge hie und da nöthig seyn kann, durch das hineingesetzte arc, z. B. in $\sin \operatorname{arc} \gamma az$ ausdrücklich zu erinnern, dafs γaz als ein Kreisbogen gedacht werden solle, von dessen Sinus die Rede sey.

Aufgabe.

§. 10. I. Den Differentialquotienten $\frac{d \sin\varphi}{d\varphi}$ zu finden, $d\varphi$ das Differential des Bogens φ bedeuten, dessen Function hier der Sinus ist.

II. Den Differentialquotienten $\frac{d \cos\varphi}{d\varphi}$ zu finden, den Cosinus als Function des Bogens φ betrachtet.

Auflösung für I.

Wenn der Bogen φ mit $\Delta\varphi$ belegt, also $\varphi^1 = \varphi + \Delta\varphi$ gefordert wird, so hat man (Vorerinner. X.)

$$1.\ \sin\varphi^1 = 1.\sin(\varphi+\Delta\varphi) = \sin\varphi.\cos\Delta\varphi + \cos\varphi.\sin\Delta\varphi$$

$$\text{also } 1.\ \Delta \sin\varphi = \sin\varphi.\cos\Delta\varphi + \cos\varphi.\sin\Delta\varphi - 1.\sin\varphi$$

$$\text{und } \frac{1.\ \Delta \sin\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\sin\varphi.\cos\Delta\varphi + \cos\varphi.\sin\Delta\varphi - 1.\sin\varphi}{\Delta\varphi}$$

als den Differenzquotienten.

Wird nun statt $\Delta\varphi$ ein unendlich kleines noch in seiner Annäherung an $=0$ begriffenes $'d\varphi$ geschrieben, so haben wir den **werdenden** Differentialquotienten

$$\frac{1.{}'d\sin\varphi}{{}'d\varphi} = \frac{\sin\varphi.\cos{}'d\varphi + \cos\varphi.\sin{}'d\varphi - 1.\sin\varphi}{{}'d\varphi}$$

Da nun, indem $d\varphi = 0$ geworden ist, auch $\cos d\varphi = \cos 0 = 1$, also das Product $\sin\varphi.\cos d\varphi = \sin\varphi.1$, folglich $\sin\varphi.\cos d\varphi - 1.\sin\varphi = 0$ geworden seyn muſs: so haben wir dann

$$\frac{1.d\sin\varphi}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi.\sin d\varphi}{d\varphi}, \text{ folglich}$$

auch $\frac{d.\sin\varphi}{d\varphi} = \cos\varphi$, weil wir nachher es erweisen wollen, daſs $\frac{\sin d\varphi}{d\varphi} = \frac{0}{0}$ ein $\frac{0}{0} = 1$ ist.

Auflösung für II.

Es ist $1.\Delta\cos\varphi = 1.\cos(\varphi+\varphi\Delta) - 1.\cos\varphi = \cos\varphi.\cos\Delta\varphi - \sin\varphi.\sin\Delta\varphi - 1.\cos\varphi$

also $\frac{1.{}'d\cos\varphi}{{}'d\varphi} = \frac{\cos\varphi.\cos{}'d\varphi - \sin\varphi.\sin{}'d\varphi - 1.\cos\varphi}{{}'d\varphi}$

folglich $\frac{1.d\cos\varphi}{d\varphi} = -\sin\varphi.\frac{\sin d\varphi}{d\varphi} = -\sin\varphi$, indem hier $\cos\varphi.\cos d\varphi = \cos\varphi.\cos 0 = \cos\varphi.1.$ geworden, durch $-1.\cos\varphi$ vernullt wird, und daſs $\frac{1.\sin d\varphi}{d\varphi} = \frac{1.\sin 0}{\text{arc } 0} = 1$ sey, nachher zu erweisen, wie vorhin versprochen wird.

Zusatz.

§. 11. Als genaue Gröſsen-Differentiale (das heiſst, als Gröſsen der genauen Differentiale) sind also hiemit erwiesen.

I. $d \sin \varphi = \cos \varphi . d\varphi$ und

II. $d \cos \varphi = -\sin \varphi . d\varphi$.

Und III. $d \operatorname{tang} \varphi = \frac{d\varphi}{\cos \varphi^2}$

IV. $d \cot \varphi = -\frac{d\varphi}{\sin \varphi^2}$

V. $d \sec \varphi = \frac{\sin \varphi . d\varphi}{\cos \varphi^2}$

VI. $d \operatorname{cosec} \varphi = -\frac{\cos \varphi . d\varphi}{\sin \varphi^2}$

VII. $d \sin \operatorname{vers} \varphi = \sin \varphi . d\varphi$

VIII. $d \cos \operatorname{vers} \varphi = -\cos \varphi . d\varphi$.

lassen sich aus I. und II. leicht folgern. Denn da

III. $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ ist, das hiermit geforderte Dividiren aber eine algebraische Operation ausmacht: so hat man durch VI. §. 45.

auch $d \operatorname{tang} \varphi = \frac{\cos \varphi . d \sin \varphi - \sin \varphi . d \cos \varphi}{\cos \varphi , \cos \varphi}$;

durch I. und II.

also $d \operatorname{tang} \varphi = \frac{\cos \varphi . \cos \varphi + \sin \varphi . \sin \varphi}{\cos \varphi . \cos \varphi} d\varphi$

$= \frac{1 . 1}{\cos \varphi^2} d\varphi$.

IV. Da $\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ ist, so mufs

$d \operatorname{cotang} \varphi = \frac{\sin \varphi . d \cos \varphi - \cos \varphi . d \sin \varphi}{\sin \varphi . \sin \varphi}$

(VI. §. .); nach I. und II. also

$d \operatorname{cotang} \varphi = \frac{-\sin \varphi . \sin \varphi - \cos \varphi . \cos \varphi}{\sin \varphi . \sin \varphi} . d\varphi$

$= -\frac{1 . 1}{\sin \varphi^2} d\varphi$ seyn.

V. Da $\sec \varphi = (1 . 1 + \operatorname{tang} \varphi^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, das Potenziren für die bestimmten Dignitäten $\frac{1}{2}$ und 2 aber eine algebraische Operation ausmacht: so hat man (2te Erweiterung des ersten Lehrsatzes VI. §. 52.)

$d\sec\varphi = \frac{1}{2}.(1.1 + \tang\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}.\ d\tang\varphi^2$, und
$d\sec\varphi = \frac{1}{2}.(1.1 + \tang\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}.\ 2\tang\varphi.\ d\tang\varphi$; durch III. also:

$$d\sec\varphi = \frac{\tang\varphi.\ d\varphi}{(1.1 + \tang\varphi^2)^{\frac{1}{2}}.\ \cos\varphi^2} = \frac{\tang\varphi.\ d\varphi}{\sec\varphi.\ \cos\varphi^2},$$

auch $= \frac{1.\ \sin\varphi}{\cos\varphi^2}.\ d\varphi.$

VI. Auf ähnliche Weise ergiebt sich

$$\begin{aligned} d\ \mathrm{cosec}\ \varphi &= d.\ (1.1 + \cot\varphi^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \tfrac{1}{2}\ (1.1 + \cot\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}.\ 2\cot\varphi.\ d\cot\varphi \\ &= \frac{\cot\varphi}{\mathrm{cosec}\ \varphi}.\ d\cot\varphi = -\frac{\cot\varphi}{\mathrm{cosec}\ \varphi}.\frac{1}{\sin\varphi^2}.\ d\varphi \\ &= \frac{1.\ \cos\varphi}{\sin\varphi^2}.\ d\varphi. \end{aligned}$$

VII. $d\ \mathrm{sin\ vers}\ \varphi = d\,(1 - \cos\varphi) = -d\cos\varphi = \sin\varphi.\ d\varphi.$

VIII. $d\ \mathrm{cos\ vers}\ \varphi = d\,(1 - \sin\varphi) = -d\sin\varphi = -\cos\varphi.\ d\varphi.$

Anmerkung 1.

§. 12. In Fig. 7. sey $AM = \varphi$ und $MM^1 = d\varphi$, so mufs mit $d\varphi = 0$ geworden, auch der Winkel $MCt = 0$ geworden seyn, wenn von der MT der Kreisbogen in M berührt wird, also CMT ein rechter Winkel ist. Indem daher M^1MC einem rechten Winkel gleich werdend ist, so mufs auch der Winkel M^1MN dem Winkel CMP gleich werdend, also das bei N rechtwinklige Dreieck M^1NM dem bei P rechtwinkligen Dreiecke CPM ähnlich werdend seyn, und indem alles, was an der völligen Aehnlichkeit fehlt, mit $d\varphi = 0$ verschwunden ist, so mufs dann auch

$$MM^1 : NM^1 = CM : CP$$

das ist $d\varphi : d\sin\varphi = 1 : \cos\varphi$, also

$1.\ d\sin\varphi = \cos\varphi\ d\varphi$ geworden seyn; eine graphische Darstellung für dieses Sinus-Differential, welche

neben dem obigen strengern Erweise immerhin als eine anschauliche Gedächtnifshülfe zu empfehlen ist.

Für das Cosinus-Differential kann man aus derselben Figur eben so schliefsen,

dafs $MM^x : MN = MC : MP = CM : PM$

das ist $d\varphi : -d\cos\varphi = 1 : -\sin\varphi = 1 : \sin\varphi$

also $-1 . d\cos\varphi = \sin\varphi . d\varphi$ seyn mufs.

Denn da $MN = PP^x$, dem $CP = \cos\varphi$ allemal entgegen gerichtet, allemal eine Verkleinerung der absoluten Gröfse des $\cos\varphi$ ausmacht, φ mag seyn, welcher Bogen es will: so ist dieses PP^x die Gegengröfse von dem schlechthin so genannten $d\cos\varphi$; folglich das schlechthin so genannte $d\cos\varphi = \frac{-\sin\varphi . d\varphi}{1}$.

Nämlich ein bejahtes Differential des Bogens, also (III. §. 30.) das Differential eines bejahten Bogens φ, bewirkt ein negatives Differential des $\cos\varphi$, wenn $\sin\varphi$ bejaht ist; mufs dagegen ein bejahtes bewirken, wo $\sin\varphi$ verneint, also $-\sin\varphi$ bejaht ist.

Gerade umgekehrt müfste sich das Zeichen des $d\cos\varphi$ ergeben, wenn $d\varphi$ verneint angenommen wäre, wie es in der Regel geschehen und ohne ausdrückliche Gegenerinnerung allemal vorausgesetzt werden müfste, wenn φ mit einer, der bejahten Drehung entgegen kreisender Drehung beschriebener Bogen, ein $-\varphi$ wäre; weil in der Regel jedes $d(-\varphi) = -(\varphi + d\varphi) = (-\varphi) = -d\varphi$ angenommen wird (VI. §. 30).

Für TT^x als $d\,\text{tang}\,\varphi$ ergeben sich nach Figur 8, die beiden Proportionen

$$r : \sec\varphi = d\varphi : TU$$
$$r : \sec\varphi = TU : TT^x,$$

aus welchen $d\,\text{tang}\,\varphi = \frac{\sec\varphi^2}{1, 1} . d\varphi$, also auch $= \frac{1. 1}{\cos\varphi^2} . d\varphi$ folgt.

Noch rathe ich, für $d \sin vers \varphi = \sin \varphi . d\varphi$ auch durch Zeichnung (Fig. 7.) sich darzustellen, auf welche Weise es allemal als die Gegengröfse vom $d \cos \varphi = -\sin \varphi . d\varphi$ sich ergiebt. Nämlich P, der Endpunct des $CP = \cos \varphi$, mag liegen, wo er will; allemal ist $\sin vers \varphi = PC + CA = -CP + CA$, die algebraische Summe aus der Gegengröfse des Cosinus, und dem bejahten ersten Halbmesser; folglich der Sinus versus allemal bejaht. Da aber sein mit φ veränderlicher Theil die Gegengröfse des Cosinus ist, so mufs auch sein durch das Differential des Bogens φ bewirktes Differential allemal die Gegengröfse des für den Cosinus bewirkten Differentials ausmachen.

Anmerkung 2.

§. 13. Die bequemste Anwendung und kürzeste Darstellung aller in §. 11. gefundenen Formeln gewinnt man dadurch; dafs man sich unter $arc \varphi$, $\sin \varphi$, $tang \varphi$ u. s. w. lauter Zahlen denkt, so dafs erst $arc \varphi . 1$, $\sin \varphi . 1$ u. s. w. die Linien seyn würden, durch welche diese Gröfsen in einem Kreise darzustellen wären, dessen Halbmesser die hier hinzugeschriebene lineäre Einheit ist.

Wenn nun in der Auflösung für I, (§. 10) des $\sin \varphi$ belegte Gröfse

$(\sin \varphi)^1 = \sin (\varphi + \triangle \varphi) = \sin \varphi . \cos \triangle \varphi + \cos \varphi . \sin \triangle \varphi$

als Zahlenausdruck betrachtet wird, so ist jedes seiner beiden Glieder ein Product aus 2 Realfactoren, von denen jeder eine Linie ist, so bald $(\sin \varphi)^1$ als Linie gedacht werden soll. Dann würde von diesem belegten Zustande der unbelegte $\sin \varphi$, als Linie schlechterdings nicht, sondern nur als Flächengröfse $1 . \sin \varphi$ können abgezogen werden.

Hieran wird man nun auch unmittelbar sich erin-

nert finden, wenn man auf die Dimensionen der Producte achtet. Weit mühsamer wäre es, zu bedenken, dafs die lineäre Gröfse $r.\sin(\varphi+\triangle\varphi)$ eigentlich $= \frac{r.\sin\varphi.\ r.\cos\triangle\varphi}{r} + \frac{r.\cos\varphi.\ r.\sin\triangle\varphi}{r}$ ist, und daher die unbelegte Function $r.\sin\varphi$ als $\frac{r.r.\sin\varphi}{r}$ davon abzuziehen sey.

§. 14. *Die Behauptung*

in §. 10, dafs $\frac{\sin d\ arc\varphi}{d\ arc\varphi} = \frac{0}{0} = 1$ sey, werden hoffentlich meine Leser eines Beweises bedürftig erachten; weil sie von mehren $\frac{0}{0}$ es bereits wissen, dafs bald dieser, bald jener bestimmte Werth, von 1 sehr verschieden, ihnen zugehört; für unsere obige Herleitung der Differentialquotienten $\frac{d.\sin arc\varphi}{d.arc\varphi}$ und $\frac{d.\cos arc\varphi}{d.arc\varphi}$ aber dieser Werth zu wissen nöthig ist. Wenn man dieses Bedürfnifs bei andern Beweisarten zu bemerken, keine Gelegenheit hat: so ist eben dieses eine Anzeige; dafs bei ihnen manches Wesentliche unbemerkt durchschlüpfen kann; und es scheint mir sehr nützlich, folgendes Beispiel aufzustellen.

§. 15. Wenn wir uns durch endliche Analysis schon davon überzeugt hätten, *)

dafs 1) $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - + \ldots$

*) mit einem Zeitaufwande, den der Practiker vermeiden mufs, weil ihm viel schwierige Anwendungen des Calculs bevorstehen, jene Reihen aber aus den bündig erwiesenen Differentialquotienten sich sehr kurz und deutlich folgern lassen.

und 2) $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - + \ldots$ seyn mufs; so könnten wir aus 1) sogleich auf $\frac{d \sin\varphi}{d\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4}$ schliefsen, und somit dafs $\frac{d \sin\varphi}{d\varphi} = \cos\varphi$ seyn mufs, durch 2) überzeugt seyn, ohne nunmehr auf die Frage zu kommen, ob sin d arc φ und d arc φ im Verhältnisse der Gleichheit verschwindend seyn müssen, oder nicht! welches doch für jeden der wahrhaften Differentialmethode angemessenen Beweis des $d\sin\varphi = \cos\varphi . d\varphi$ eine recht wesentliche Frage ausmacht!

Gesetzt auch, wir wollten hiebei mit Tedenat (Leçons élém. T. II. §. 286) aus 1) zuvörderst auf $\sin d\varphi = d\varphi - \frac{d\varphi^3}{1.2.} + \frac{d\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$ und hieraus mit ihm auf $\frac{\sin d\varphi}{d\varphi} = 1$ schliefsen: so findet ja hingegen die Erinnerung Statt, dafs dieses $d\varphi$ keineswegs ein Differential des φ, eine Belegung des φ während seiner ganzen Veränderlichkeit, sondern nur ein einzelner Werthfall (Verschwindungsfall, $\varphi = 0$) des φ selbst sey! Für diesen Werthfall, $\varphi = 0$, allerdings $\frac{d \sin\varphi}{d\varphi} = \frac{\sin . d\varphi}{d\varphi}$ seyn müsse, diese Abgleichung aber für Hrn. Tedenat einen Cirkel im Beweise veranlasse, und übrigens mit der Warnung zu begleiten sey, dafs man sie ja nicht allgemein, sondern nur für den einzigen Werthfall $\varphi = 0$, als richtig anerkennen dürfe!!

Beweis, dafs $\frac{\sin d \text{ arc } \varphi}{d \text{ arc } \varphi} = \frac{0}{0} = 1$ *ist.*

§. 16. Jeder Kreisbogen, welcher kleiner als 90 Grad ist, also auch jeder Kreisbogen $MM' = d\varphi$

Fig. 10. den man sich als Differential irgend eines veränderlichen $AM = \varphi$, also sogleich sehr klein und als $'d\varphi$ geschrieben, noch immerfort kleiner werdend, und dem $d\varphi = o$ sich nähernd denkt, ist zwischen seiner Tangente $MT = \text{Tang } 'd\varphi$ und seinem Sinus $SM' = \text{Sin } d\varphi$ dergestalt gelegen, dafs er mit der Tangente den Anfangspunct M, und mit dem Sinus den Endpunct M' gemein hat. Folglich mufs, wenn mit Verkleinerung des Bogens der Sinus und die Tangente sich vernullt haben, auch der Bogen $'d\varphi$ selbst $= o$ geworden seyn, und eher nicht.

Indem nun während der stetigen Verkleinerung immerfort und durchaus

$$\text{Sin Arc } 'd\varphi : \text{Tang Arc } 'd\varphi = \text{Cos arc } 'd\varphi : r$$

geblieben ist, so mufs mit $d\varphi = o$
auch $\text{Sin arc } d\varphi : \text{Tang arc } d\varphi = r : r$ geworden, sogar der Sinus und die Tangente im Verhältnisse der Gleichheit verschwunden seyn; um so mehr also

sowohl $\text{Sin Arc } d\varphi : \text{Arc } d\varphi = 1 : 1$

als auch $\text{Arc } d\varphi : \text{Tang Arc } d\varphi = 1 : 1$ geworden seyn, je gewisser es schon aus der erwähnten Lage des Bogens erhellet, dafs er auch während des Verschwindens zwischen Sinus und Tangente gelegen immerfort bleiben mufste.

Will man sich indessen mit dieser anschaulichen Lage noch nicht begnügen: so kann man auch die Sehne des Bogens $'d\varphi$ zu Hülfe nehmen; da es denn nicht nur durch Elementargeometrie schon bekannt ist, dafs der Bogen gröfser als die Sehne, und diese gröfser als der Sinus, um so mehr also der Bogen gröfser als der Sinus ist; sondern auch auf folgende Weise dargethan werden kann, dafs der *Bogen* bis zum Verschwinden hin immerfort kleiner als die Tangente bleibt.

Sey M'N der CM parallel gezogen, so ist $NT = \frac{\text{Sin Arc } d\varphi}{\text{Cos Arc } d\varphi}(1 - \text{Cos Arc } d\varphi)$, also NT unendlich klein werdend gegen die unendlich kleinen MN, und, mit $d\varphi = 0$ geworden, auch' die $NT = \frac{0}{1}.(1-1) = 0$, also völligst $MT = MN = 0$ geworden.

Nun sind in der Figur 10. vier Linien der M'N parallel, und zwischen ihnen vier andere der MN parallel gezogen. Man denke sich dergleichen unendlich viele, so erhellet, dafs die MM' aus eben so unendlich vielen Hypotenusen besteht, als die NM' nur Katheten enthält.

Zusatz.

§. 17. Da während der unendlichen Verkleinerung eines Bogens und seines Sinus, seine Sehne zwischen beiden fallend bleibt: so ist durch die obigen Beweise auch dargethan, dafs der Kreisbogen und dessen Sehne im Verhältnisse der Gleichheit verschwinden.

In dem zweiten Beweise ist zugleich mit dargethan, dafs auch Arc $d\varphi$: Tang Arc $d\varphi = 1 : 1$ ist, auch der Bogen und dessen trigonometrische Tangente im Verhältnisse der Gleichheit verschwinden; welches anderwärts zu wissen nöthig ist.

Allgemeine Erweiterung der obigen Differentialformeln.

§. 18. Da in den sämmtlichen §. 11. aufgeführten Formeln, φ jeden veränderlichen Bogen bedeuten kann: so mufs auch allenthalben Φ statt φ zu schreiben erlaubt seyn, wenn Φ irgend einen Kreisbogen

bedeutet oder bedeuten kann, dessen Sinus, oder Cosinus u. s. w. man anzugeben weifs, es mag Φ übrigens eine Function des φ seyn, welche es will. Um dergleichen Erweiterung z. B. für die Formel $d \sin \varphi = \cos \varphi \, d\varphi$ anzuwenden, schreibt man $d \sin \Phi = \cos \Phi \, d\Phi$.

Wenn nun $\Phi = a - \varphi$ wäre, so würde auch $d \sin \Phi = \cos(a - \varphi) . d(a - \varphi) = - \cos(a - \varphi) \, d\varphi$ sich ergeben.

Sey $a = \frac{\pi}{2}$, so weifs man, dafs $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi$, und $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$ ist, hat also hiermit gefunden, dafs $d \cos \varphi = - \sin \varphi \, d\varphi$ ist.

Eben so könnte aus der erweiterten Formel $d \operatorname{tang} \Phi = \frac{1 . 1}{\cos \Phi^2} d\Phi$ auf $d \operatorname{cotang} \varphi = \frac{1 . 1}{- \sin \varphi^2} d\varphi$, und aus der erweiterten Formel für $d \sec \varphi$ auf $d \operatorname{cosec} \varphi$ geschlossen werden.

Aus mehren Gründen aber rathe ich, die obigen unmittelbaren Beweise für diese Differentiale zu befolgen, welche ich übrigens, ebenfalls absichtlich, sämmtlich bis auf Sinus- und Cosinus-Ausdruck gebracht habe.

§. 19. Aus den acht Differentialformeln in §. 11. lassen sich nicht nur die VIII. Differentialquotienten in dem nachfolgenden §. 20. folgern, bei welchen der Bogen φ als die belegte Grundgröfse angenommen ist, sondern auch die umgekehrten 8 Quotienten in §. 21. bei welchen 1) der Sinus, 2) der Cosinus, 3) die Tangente, u. s. w. als die urbelegte Grundgröfse, und der Bogen dagegen als Function einer solchen trigonometrischen Hülfslinie betrachtet wird. Auch sind diejenigen Ausdrücke, welche nebst den zuerst aufgeführten, und namentlich in der Integralrechnung, am meisten gebraucht werden, hinzugefügt. Aus den zuerst aufgeführten können sie durch bekannte Elementartrigonometrie gefolgert werden, die überdies auch in den Herleitungen §. 11. schon benutzt ist.

§. 20.

I.

$$\frac{d \sin \varphi}{d\varphi} = \cos \varphi \text{ auch} = \sqrt{1.1 - \sin \varphi^2}$$

II.

$$\frac{d \cos \varphi}{d\varphi} = -\sin \varphi \text{ auch} = -\sqrt{1.1. - \cos \varphi^2}$$

III.

$$\frac{d \operatorname{tang} \varphi}{d\varphi} = \frac{1.1}{\cos \varphi^2} \text{ auch} = \frac{1.1 + \operatorname{tang} \varphi^2}{1.1}$$

IV.

$$\frac{d \cot \varphi}{d\varphi} = \frac{1.1}{\sin \varphi^2} \text{ auch} = -\frac{1.1 + \cot \varphi^2}{1.1}$$

V.

$$\frac{d \sec \varphi}{d\varphi} = \frac{1.1 \sin \varphi}{\cos \varphi^2} \text{ auch} = \frac{\sec \varphi \sqrt{(\sec \varphi^2 - 1.1)}}{1.1}$$

VI.

$$\frac{d \operatorname{cosec} \varphi}{d\varphi} = -\frac{1.1. \cos \varphi}{\sin \varphi^2} \text{ auch} = -\frac{\operatorname{cosec} \varphi \sqrt{(\operatorname{cosec} \varphi^2 - 1.1)}}{1.1}$$

VII.

$$\frac{d \operatorname{sin vers} \varphi}{d\varphi} = \sin \varphi \text{ auch} = \frac{\sqrt{(2.1 \operatorname{sin vers} \varphi - \operatorname{sin vers} \varphi^2)}}{1}$$

VIII.

$$\frac{d \operatorname{cos vers} \varphi}{d\varphi} = -\cos \varphi \text{ auch} = -\frac{\sqrt{(2.1 \operatorname{cos vers} \varphi - \operatorname{cos vers} \varphi^2)}}{1}$$

§. 21.

1.

$$\frac{d\varphi}{d\ \sin\ \varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} \text{ auch} = \frac{1}{\sqrt{(1,1-\sin\varphi^2)}}$$

2.

$$\frac{d\varphi}{d\ \cos\ \varphi} = -\frac{1}{\sin\varphi} \text{ auch} = -\frac{1}{\sqrt{(1.1-\cos\varphi^2)}}$$

3.

$$\frac{d\varphi}{d\ \text{tang}\ \varphi} = \frac{\cos\varphi^2}{1.1} \text{ auch} = \frac{1.1}{(1.1+\text{tang}\,\varphi^2)}$$

4.

$$\frac{d\varphi}{d\ \cot\ \varphi} = -\frac{\sin\varphi^2}{1.1} \text{ auch} = -\frac{1.1}{(1.1+\cot\varphi^2)}$$

5.

$$\frac{d\varphi}{d\ \sec\ \varphi} = \frac{\cos\varphi^2}{1.\sin\varphi} \text{ auch} = \frac{1.1}{\sec\varphi\sqrt{(\sec\varphi^2-1.1)}}$$

6.

$$\frac{d\varphi}{d\ \text{cosec}\ \varphi} = -\frac{\sin\varphi^2}{1.\cos\varphi} \text{ auch} = -\frac{1.1}{\text{cosec}\,\varphi\sqrt{(\text{cosec}\,\varphi^2-1.1)}}$$

7.

$$\frac{d\varphi}{d\,\text{sin vers}\,\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi} \text{ auch} = \frac{1}{\sqrt{(2.1\,\text{sin vers}\varphi-\text{sinvers}\varphi^2)}}$$

8.

$$\frac{d\varphi}{d\cos\text{vers}\varphi} = -\frac{1}{\cos\varphi} \text{ auch} = -\frac{1}{\sqrt{(2.1.\text{cosvers}\varphi-\text{cosvers}\varphi^2)}}$$

§. 22. Da die sämmtlichen acht trigonometrischen Hülfslinien vermittelst ihres constanten Halbmessers, als Seiten rechtwinkliger Dreiecke einander functionirt sind: so mufs jeder von den 16 Differentialquotienten in §. 20. und 21, durch geforderte Quadratwurzeln algebraisch darstellig seyn, wenn wir irgend eine von jenen Hülfslinien, welche dem Bogen φ zugehörig sind, als mit ihm gegeben behandeln, wozu die trigonometrischen Tafeln uns praktisch berechtigen, weil man ja vermittelst derselben für jeden gegebnen $\sin\varphi$, oder $\cos\varphi$, oder $\operatorname{tang}\varphi$, etc. die dazu gehörigen Bogen φ, und umgekehrt, für alle Praxis hinreichend genau, finden kann.

§. 23. Nehmen wir nun z. B. $\sin\varphi$ als die Gröfse an, für welche, wenn sie uns gegeben ist, auch der dazu gehörige Bogen φ vermittelst der Tafeln so gut als mit gegeben ist, und nennen $\sin\varphi = s$; so dafs mit veränderlichem Werthe des s auch der Bogen φ veränderlich ist: so haben wir den Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{d\sin\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(1.1-ss)}}$, weil ja $\sqrt{(1.1-s.s)} = \cos\varphi$ ist. Auch haben wir nun $d\varphi = \frac{ds}{\sqrt{(1.1-ss)}}$, weil ja aus $\sin\varphi = s$, auch $d\sin\varphi = ds$ folgt.

Für den zweiten Quotienten in §. 21, $\frac{d\varphi}{d\cos\varphi} = -\frac{1}{\sin\varphi}$, werde $\cos\varphi = k$. genannt, so hat man auch $d\cos\varphi = dk$, also $d\varphi = -\frac{dk}{\sqrt{(1.1-kk)}}$.

Für den Quotienten 3) in §. 21, $\frac{d\varphi}{d\operatorname{tang}\varphi} = \cos\varphi^2$, werde $\operatorname{tang}\varphi = t$ genannt, so hat man auch $d\operatorname{tang}\varphi = dt$; übrigens $\cos\varphi^2 = \frac{1.1}{\sec\varphi^2} = \frac{1.1}{1.1+\operatorname{tang}\varphi^2}$; also $d\varphi = \frac{1.1.dt}{1.1+tt}$.

§. 24. Hierbei aber ist es so gewöhnlich als rathsam, die Bedeutung der Buchstaben ausdrücklich ihnen vorzusetzen. Man schreibt z. B. d arc φ um ausdrücklich anzudeuten, daſs φ ein Kreisbogen seyn soll, und d arc tang t bedeutet das Differential eines Kreisbogens, dessen Tangente $= t$ ist.

Bei solcher ausdrücklichen Andeutung ist es nun nicht ferner nöthig, für Sinus, Cosinus, Tangente, u.s.w. eigenthümliche Buchstaben s, k, t, u.s.w., wie vorhin, zu gebrauchen: sondern auch

$$\text{d arc sin } x = \frac{dx}{\sqrt{(1.1 - xx)}}; \quad \text{d arc cos } x = \frac{-dx}{\sqrt{(1.1 - xx)}},$$

$$\text{d arc tang } x = \frac{1.1.dx}{1.1 + xx}, \text{ ist durchaus verständlich*).}$$

---

*) Auch wenn wir arc sin $\sqrt{aa - zz}$ geschrieben hätten, würde man darunter den Bogen eines Sinus zu verstehen haben, dessen Veränderlichkeit von dem veränderlichen z seiner Function $\sqrt{aa - zz}$ gemäſs abhängig sey.

Einige klassische Lehrer pflegen arc sin $= x$; arc tang $= x$; arc sin $= \sqrt{aa - zz}$ zu schreiben, welches wir ebenfalls, besonders in Fällen des letzten Beispieles, wo die veränderliche Grundgröſse des Bogens selbst schon eine Function andrer veränderlichen Gröſsen seyn soll, bisweilen zu mehrer Deutlichkeit befolgen werden.

Dagegen werden wir mit Vega, $\sin^2 z$ statt $\sin z^2$ zu schreiben weniger billigen können; nicht, wenn z einen Winkel oder Bogen, nicht, wenn z die Sinusgröſse selbst bedeuten soll. Denn es mag z einen Winkel f, oder einen diesen Winkel messenden Bogen φ bedeuten: so wird man unter $\sin f^2$ und $\sin \varphi^2$ etwas anders als $(\sin f)^2$ nnd $(\sin \varphi)^2$ zu verstehen, eben deshalb nicht geneigt seyn, weil ja der ganze Ausdruck sin f, und der ganze Ausdruck sin φ, nichts anders als die dem Sinus des Winkels f, und dem Sinus des Bogens φ, angehörige Gröſse andeuten kann und soll, und nun diese Gröſse selbst, sie mag als Linie oder als Zahl angegeben werden, keinesweges aber etwa der Begriff eines Sinus dasjenige ist, was quadrirt werden soll!

Der erste Ausdruck gibt das Differential eines veränderlichen Kreisbogens (φ) an, welcher dem veränderlichen Sinus $= x$ zugehört; der zweite Ausdruck, das Differential eines Bogens (φ), dessen Cosinus $= x$ ist; und der dritte, das Differential des veränderlichen Bogens (φ), der mit seiner veränderlichen Tangente, $= x$ genannt, veränderlich ist.

Indem wir nun auch diesen veränderlichen Kreisbogen allenthalben, wie bisher, durch φ bezeichnen: so ist

im 1n Ausdruck, $x = \sin\varphi$ folglich $dx = d\sin\varphi$ bedeutend,
im 2n " $x = \cos\varphi$ " $dx = d\cos\varphi$ "
im 3n " $x = \text{tang}\,\varphi$ " $dx = d\,\text{tang}\,\varphi$ "

§. 25. Hiermit liegt vor Augen, wie die übrigen 5 Differentialausdrücke in der folgenden Tafel zu verstehen sind, und wie leicht man diese sämmtlichen 8 Differentialausdrücke aus den 8 Differentialquotienten der Tafel §. 20. herleiten konnte.

Wenn nun $\sin f^2 = (\sin f)^2$ und $\sin\varphi^2 = (\sin\varphi)^2$ bedeutet: so muſs auch $\sin\text{ang}\,f^2 = (\sin\text{ang}\,f)^2$ und $\sin\text{arc}\varphi^2 = (\sin\text{arc}\,\varphi)^2$ bedeutend seyn; weil ja durch ang und arc nur ausdrücklich erinnert wird, daſs f einen Winkel und φ einen Bogen angebe.

Wenn endlich in dem Ausdrucke $\sin z$, die z selbst die Sinusgröſse bedeutend, also $\sin z$ so viel als $\sin = z$ bedeutend wäre: so würde doch wiederum $(\sin = z)^2$ durch $\sin z^2$ richtig angedeutet seyn; dagegen, wer hier $\sin^2$ schreiben wollte, sogar $\sin^2 z^2$ schreiben müſste!

Gleichwohl werden uns späterhin einige Ausdrücke vorkommen, bei welchen Vega's Schreibart die bequemste ist.

1) d arc sin x	$= \frac{1.\,dx}{\sqrt{(1.1 - xx)}}$	$= \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$
2) d arc cos x	$= -\frac{1.\,dx}{\sqrt{(1.1 - xx)}}$	$= -\frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$
3) d arc tang x	$= \frac{1.1.\,dx}{1.1 + xx}$	$= \frac{dx}{1 + xx}$
4) d arc cot x	$= -\frac{1.1.\,dx}{1.1 + xx}$	$= -\frac{dx}{1 + xx}$
5) d arc sec x	$= \frac{1.1.\,dx}{x\sqrt{(xx - 1.1)}}$	$= \frac{dx}{x\sqrt{(xx - 1)}}$
6) d arc cosec x	$= -\frac{1.1.\,dx}{x\sqrt{(xx - 1.1)}}$	$= -\frac{dx}{x\sqrt{(xx - 1)}}$
7) d sin vers x	$= \frac{1.\,dx}{\sqrt{(1.2x - xx)}}$	$= \frac{dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$
8) d cos vers x	$= -\frac{1.\,dx}{\sqrt{(1.2x - xx)}}$	$= -\frac{dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$

In der ersten Säule habe ich die Einheiten 1 und 1.1 so vollständig aufgeführt, dafs man z. B. in der 5ten Formel, unter dessen $\varphi = \text{arc sec } x$, und dessen $x = \sec\varphi$ nach Belieben, entweder die lineären Gröfsen der Bogen und der Secanten, wie sie in einem mit dem Halbmesser $= 1$ gezeichneten Kreise sich ergeben würden, oder auch blos die diesen Längen proportionalen Zahlen sich vorstellen kann. Nur die letzte Vorstellung wollen wir verlangt voraussetzen, wo wir der Ausdrücke in der zweiten Säule uns bedienen, wie sie von den neuern Analysten gewöhnlich gebraucht werden, in der That auch, für die Anwendung die bequemsten sind; und ich halte für gut, von solcher Anwendung in der Integralrechnung, vorläufig ein par Beispiele zu geben.

§. 26. Gesetzt, wir sind in irgend einer Untersuchung auf den Differential-Ausdruck $(1 - xx)^{-\frac{1}{2}}\,dx$ gekommen, und wünschen diejenige Function X zu wissen, dessen Differential $dX = (1 - xx)^{-\frac{1}{2}}\,dx$ geben

könne: so erhellet aus obiger 1) $d \operatorname{arc\,sin} x = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = (1-xx)^{-\frac{1}{2}} dx$ dafs $X = \operatorname{arc\,sin} x$, das heifst X eine veränderliche Bogenlänge φ sey, die man als Function eines veränderlichen sinus $= x = \sin f$ zu betrachten habe; und so kann nun $X = \operatorname{arc\,sin} x = \operatorname{arc\,sin} f$ für jeden einzelen möglichen Werth des $x = \sin f$ aus den trigonometrischen Tafeln auf folgende Weise gefunden werden.

Sey $x = 0,9945219$ ein einzelner Werth des x, für welchen man den Werth des X zu wissen verlangt, so findet man, diese Zahl unter den Sinuszahlen aufgesucht, dafs der ihr zugehörige Winkel $f = 84$ Gradwinkel, der diesem Winkel bespannende Bogen also 84 Gradbogen enthält. Vermittelst der Tafel für die Bogenlängen findet man dann, dafs diese Bogenlänge $= 1,4660765 \ldots$ ist, womit die Gröfse des X für diesen einzelen Werth des x gefunden ist.

Da die möglichen Werthe eines Sinus nicht über den Sinus totus $= 1$ hinausgehen können; so würde man für ein gegebnes $x > 1$ vermittelst der Sinustafeln für die Gröfse des X nichts bestimmen können. Aber auch der Differentialausdruck $dX = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ mufs es zugestehen, dafs er für jedes $x > 1$ etwas unmögliches fordert.

§. 27. Bei diesem Beispiele $dX = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ lag die Vergleichung mit dem trigonometrischen Differentiale $d. \operatorname{arc\,sin} x = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ sogleich vor Augen; und dennoch war es genau betrachtet, rathsam, sich diese Formel vermittelst des Winkels f als ein $d \operatorname{arc\,sin} f = \frac{d \sin f}{\sqrt{(1-[\sin f]^2)}}$ dargestellt zu haben.

Noch rathsamer ist diese Darstellung, wenn man mit einer vorgegebnen Differentialformel erst mancherlei Umformungen vornehmen mufs, ehe man sie der trigonometrischen unterworfen sieht.

Sey z. B. $dX = \frac{dx}{r(a-bxx)}$ gegeben: so mufs man zuvörderst bedenken, dafs

auch $dX = \frac{dx}{r a . r\left(1-\frac{b}{a}xx\right)} = \frac{1}{r a} \cdot \frac{dx}{r\left(1-\left(\frac{r b}{r a}x\right)^2\right)}$

$$= \frac{r a}{r b} \cdot \frac{1}{r a} \cdot \frac{\frac{r b}{r a}dx}{r\left(1-\left(\frac{r b}{r a}x\right)^2\right)}$$

also auch $dX = \frac{1}{r b} \cdot \frac{d.\frac{r b}{r a}x}{r\left(1-\left(\frac{r b}{r a}x\right)^2\right)}$ ist; um durch Vergleichung mit $d \operatorname{arc\,sin} f = \frac{d \sin f}{r(1-(\sin f)^2)}$ es einzusehen, dafs $X = \frac{1}{r b}$, arc sin $\left(\frac{r b}{r a}x\right)$ seyn mufs, oder doch, wie wir in der Integralrechnung genauer erinnern werden, dieses x den veränderlichen Theil aller der Functionen ausmacht; deren Differential sich $= \frac{dx}{r(a-bxx)}$ ergeben kann.

§. 28. Wenn wir in der ersten Säule §. 25. statt der linearen Einheit 1 einen Halbmesser R ansetzen und Arc statt des dortigen arc schreiben: so erhalten wir die Formeln

1) d. Arc sin $x = \frac{Rdx}{r(RR-xx)}$

2) d. Arc cos $x = -\frac{Rdx}{r(RR-xx)}$

3) d. Arc tang $x = \frac{RRdx}{RR+xx}$

u. s. w., wie sie namentlich auch bei Vega vorkommen, nur dafs dort statt unser R ein a geschrieben ist; welches ich schon wegen dessen Gebrauch in den vorigen Paragraphen nicht anwenden wollte.

Mag man immerhin sagen können, dafs man sich nunmehr den Halbmesser R statt des vorigen 1 vorzustellen habe, so ist doch der richtige Gebrauch dieser Ausdrücke dadurch noch nicht gesichert. Auch in anderer Hinsicht wird es nützlich seyn, folgende Vergleichungen zu beachten.

Da in der Zahlengleichung $\frac{\mathrm{d\,arc\,sin\,x}}{\mathrm{d\,sin\,x}} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$ (§. 21. No. 1) die rechte Seite derselben auch $= \frac{R}{R\sqrt{(1-xx)}} = \frac{R}{\sqrt{(RR-RxRx)}}$ bleiben mufs, R mag seyn, welche constante oder veränderliche, numerische oder lineäre Gröfse es will: so haben wir eben so allgemein auch $\frac{\mathrm{d\,arc\,sin\,x}}{\mathrm{d\,sin\,x}} = \frac{R}{\sqrt{(RR-RxRx)}}$

Wenn wir nun wiederum unter φ die Zahlen der Bogenlängen verstehen, welche in den trigonometrischen Tafeln als den Sinuszahlen x zugehörig aufgeführt sind, unter f aber wiederum die veränderlichen Winkel, welchen in jenen Tafeln die Zahlen φ angehören: so haben wir arc sin x = Bogenlänge des Winkels f, und sin x = Sinuslänge des Winkels f, folglich Rx = R sin f = Sin f, wenn Sin f die Sinuslänge des Winkels f in einem mit dem Halbmesser R beschriebenen Kreise bedeutet. Demnach hätten wir auch die Gleichung

$\frac{\mathrm{d.\,arc\,f}}{\mathrm{d\,sin\,f}} = \frac{R}{\sqrt{(RR - \mathrm{Sin\,f^2})}}$; so dafs in ihrer linken Seite immer noch sin f und arc f, die Sinus- und die Bogenzahlen bedeuten, welche in den Tafeln für

jede Gröfse des veränderlichen Winkels f einander zugehörig aufgeführt sind, die Gröfse R in der rechten Seite möchte seyn, was sie wollte.

Mit eben so allgemeiner Bedeutung des R würde nun allerdings auch die linke Seite $\frac{\mathrm{d\,arc\,f}}{\mathrm{d\,sin\,f}} = \frac{\mathrm{R.d\,arc\,f}}{\mathrm{R.d\,sin\,f}}$ bleiben müssen. Wenn aber dieser letzte Ausdruck auch $= \frac{\mathrm{d.R\,arc\,f}}{\mathrm{d.R\,sin\,f}}$ bleiben soll, so mufs nothwendig R eine constante, oder doch von der Veränderlichkeit des Winkels f unabhängig veränderliche Gröfse seyn. Unter dieser Bedingung also, und R.arc f = Arc f geschrieben, haben wir die Formel $\frac{\mathrm{d\,Arc\,f}}{\mathrm{d\,Sin\,f}} = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{(\mathrm{RR} - \mathrm{Sin\,f^2})}}$.

Wenn wir nun Sin f = x schreiben, und andeuten wollen, dafs der Bogen Arc f als Function dieses Sinus = x solle betrachtet werden: so erhalten wir die Formel $\mathrm{d\,Arc\,Sin\,x} = \frac{\mathrm{R.\,dx}}{\sqrt{(\mathrm{RR} - \mathrm{xx})}}$; indefs dagegen Vega nur dArc sin x geschrieben hat; da doch für einerlei Winkel f, wie hier vorausgesetzt wird, nicht nur dessen Bogen, sondern auch dessen Sinus, Cosinus, u.s.w. dem Halbmesser proportional sich ändert.

§. 29. Aus dieser Formel können wir nun allerdings ganz allgemein schliefsen; dafs X = Arc Sin x der mit x veränderliche Theil aller der x-Functionen seyn müsse, deren Differential sich $= \frac{\mathrm{Rdx}}{\sqrt{(\mathrm{RR} - \mathrm{xx})}}$ ergeben kann.

Um dann aber z.B. für einen einzelen Werth des Sinus = x = Sin f, z.B. für x = 2, 9835657, den Werth seines X vermittelst der trigonometrischen Tafeln zu finden, würde man zuvörderst auf sin f

$= \frac{\text{Sin } f}{R}$ schliefsen müssen. Sey etwa $R = 3$ gegeben, so hätte man $\frac{x}{3} = \frac{\text{Sin } f}{3} = 0,\ 9945219 = \sin f$; würde in den Tafeln, f als $= 84$ Gradwinkel, und dafür die Bogenlänge $\text{arc sin } f = 1,4660765$ finden, und nun aus dieser endlich auf die Bogenlänge $\text{Arc Sin } f = 3.\ 1,4660765 = 4,398$ schliefsen.

§. 30. Um zufolge dieser Formel $d \text{ Arc Sin } x = \frac{R\,dx}{r(RR-xx)}$ es einzusehen, wie ein uns entstandenes Differential $dX = \frac{dx}{r(a-bxx)}$ als Differential einer trigonometrischen Function X zu betrachten wäre, würden wir veranlafst seyn, folgende Vergleichungen einzuschlagen.

$$\text{Da } \frac{dx}{r(a-bxx)} = \frac{dx}{r b\, r\left(\frac{a}{b}-xx\right)} = \frac{\frac{1}{r b}dx}{r\left(\frac{r a.r a}{r b.r b}-xx\right)}$$

$$= \frac{1}{r a}\cdot\frac{\frac{r a}{r b}dx}{r\left(\frac{r a.r a}{r b.r b}-xx\right)}$$ bleibt: so liegt vor Augen, dafs $dX = \frac{1}{r a}.d \text{ Arc Sin } x$ seyn mufs für $R = \frac{r a}{r b}$, also für $x = \text{Sin } f = \frac{r a}{r b} \sin f$ bedeutend.

§. 31. Wenn wir nun für irgend einen einzelen Werth dieses x, vermittelst der trigonometrischen Tafeln, die ihm zugehörige Bogenlänge finden wollen: so müssen wir zuvörderst aus dem gegebnen $x = \text{Sin } f$ auf $\frac{r b}{r a}\, x = \sin f$ schliefsen, diesen sin f in den Tafeln aufsuchen, um die dem Winkel f zugehörigen

Grade und Minuten zu finden, und dann aus der Tafel der Bogenlängen, die diesen Graden und Minuten zugehörige Bogenlänge φ abzunehmen; welches denn auch die dem sin f zugehörige Bogenlänge arc sin φ in einem mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreise ist. Durch geometrische Anschaulichkeit liegt es hier vor Augen, dafs für denselben Winkel f in einem mit dem Halbmesser $R = \frac{r_a}{r_b} . 1$ beschriebenen Kreise der Sin $f = \frac{r_a}{r_b} \sin f$ seyn, und nun der diesem Sin f zugehörige Bogen, Arc Sin $f =$ Arc Sin x ebenfalls $= \frac{r_a}{r_b}$ arc sin $f = \frac{r_a}{r_b}$ arc sin $\frac{r_b}{r_a} x$ seyn mufs.

§. 32. Hiermit sind wir allerdings nun gewifs geworden, dafs das obige $dX = \frac{dx}{r(a - bxx)} = \frac{1}{r a} . d \text{ Arc Sin } x = \frac{1}{r b} d \text{ arc sin } \frac{r_a}{r_b} x$ seyn mufs (also auch $X = \frac{1}{r b}$ arc sin $\frac{r_a}{r_b} x$ für jeden möglichen Sinus $\frac{r_a}{r_b} x$, in den trigonometrischen Tafeln schon hinreichend genau berechnet kann vorgefunden werden). Indessen wird die obige Herleitung aus der Zahlengleichung $d \text{ arc sin } x = \frac{dx}{r(1 - xx)}$ immerhin einfacher bleiben.

§. 33. Die zweiten, dritten und noch höheren trigonometrischen Differentialquotienten betreffend; mufs ich besonders den Anfängern rathen, fernerhin, wie wir es bisher schon sehr absichtlich gethan haben, die VIII ersten Quotienten in §. 20, von den 8 umgekehrten in §. 21 dadurch zu unterscheiden, dafs in jenen VIII, der veränderliche Bogen φ als

die urbelegte Grundgröfse, und dann irgend eine von den geradlinigen trigonometrischen Hülfsgröfsen, als eine Function des Bogens betrachtet wird; in diesen 8 dagegen irgend eine von den acht gradlinigen Hülfsgröfsen als die urbelegte Grundgröfse, und dagegen φ als Function derselben betrachtet wird; und dadurch der sehr wesentliche Unterschied zwischen beiderlei Quotienten entstehe, dafs in jenen VIII der Nenner des Quotienten $d\varphi$ das Differential eines Kreisbogens, in den umgekehrten 8 aber das Differential irgend einer von den acht geradlinigen Hülfslinien ausmacht.

§. 34. Da nun durch die Differenziirungsregeln der trigonometrischen Functionen dafür gesorgt ist, dafs man jeden von diesen 16 ersten Differentialquotienten als eine algebraische Function von derjenigen geradlinigen Hülfsgröfse auszudrücken weifs, deren Differential in dem Quotienten mit vorkommt: so müssen für die 8 umgekehrten, deren Nenner das Differential der geraden Hülfslinie ausmacht, die zweiten, dritten und noch höhern Differentialquotienten durch blofses algebraisches differenziiren allerdings können gefunden werden. Z. B.

Da $\frac{d\varphi}{d\sin\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(1-\sin\varphi^2)}} = (1-\sin\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist, so mufs

$$\frac{d\,d\varphi}{dd\sin\varphi} = -\frac{1}{2}(1-\sin\varphi^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{2\sin\varphi \cdot d\varphi}{d\varphi}$$
$$= (1-\sin\varphi^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{d^3\varphi}{d^3\sin\varphi} = \frac{-\frac{3}{2}(1-\sin\varphi^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot -2\sin\varphi\, d\varphi \cdot \sin\varphi + (1-\sin\varphi^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot d\sin\varphi}{d\sin\varphi}$$
$$= 3(1-\sin\varphi^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot \sin\varphi^2 + (1-\sin\varphi^2)^{-\frac{3}{2}} \text{ seyn.}$$

Wenn man hierin der Bequemlichkeit wegen

$\sin\varphi = x$ genannt hat, auch $\frac{d\varphi}{d\sin\varphi} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\,\text{arc}\sin x}{dx}$ geschrieben hat, um deutlich anzuzeigen, dafs hier der Bogen φ als eine Function des $\sin\varphi = x$ betrachtet wird: so hat man nun die, bei den neuern Analysten gewöhnlichen Ausdrücke,

$\frac{d\,\text{arc}\sin x}{dx} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, folglich

$$\frac{dd\,\text{arc}\sin x}{dx\,dx} = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.\ \frac{-2x\,dx}{dx} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.x$$

$$\frac{d^3\,\text{arc}\sin x}{dx^3} = -\frac{3}{2}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.-2x\,dx.x+(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx}{dx}$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.x^2 + (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Wir mögen nun die dem Bogen φ transcendente Function $\sin\varphi$ der Kürze wegen durch x geschrieben haben, oder nicht, so liegt vor Augen, dafs man auch zum fernerhin fortgesetzten Differenziiren lediglich der beiden algebraischen Differenziirungsregeln VI. §. 55. No. II. und V. bedarf.

Ein zweites Beispiel sey $\frac{d\varphi}{d\,\text{tang}\,\varphi} = \frac{1.1}{1.1+\text{tang}\varphi^2}$.

Wenn wir hierin sogleich $\text{tang}\,\varphi = x$ schreiben, so haben wir

$\frac{d\,\text{arc tang}\,x}{dx} = \frac{1.1}{1.1+xx}$, folglich

$$\frac{d^2\,\text{arc tang}\,x}{dx\,dx} = -\frac{2x}{(1.1+xx)^2}$$

$$\frac{d^3\,\text{arc tang}\,x}{dx^3} = -\frac{2}{(1.1+xx)^2} + \frac{8.x^2}{(1.1+xx)^3}$$

und so weiter fort, durch lauter algebraisches differenziiren.

§. 35. Für die VIII Differentialquotienten in §. 20, in welcher der Nenner ein Differential des Bogens φ ist, mufs man die höheren Quotienten vermittelst der trigonometrischen Differenziirungsregeln finden, wenn

man ihren genauen Ausdruck verlangt. Denn da ihre Gröfse in den dortigen ersten Quotienten ebenfalls als eine algebraische Function einer geraden Hülfslinie angegeben ist; einer solchen aber der Bogen φ transcendent functionirt ist; so wäre es nicht möglich, jene Gröfse durch eine algebraische Function der Hülfslinie anders als näherungsweise durch eine unendliche Reihe anzugeben. Ueberdies aber sollen ja dergleichen Reihen, um der mühseligen Arbeiten der endlichen Analysis überhoben zu seyn, von uns erst vermittelst der höheren Differentialquotienten in der Folge gefunden werden.

Durch die vorhin gelehrten trigonometrischen Differenziirungsregeln wird z. B.

für $\frac{d \sin \varphi}{d\varphi} = \cos \varphi$ sogleich ge-

funden $\frac{dd \sin \varphi}{d\varphi^2} = \frac{d. \cos \varphi}{d\varphi} = -\frac{\sin \varphi \, d\varphi}{d\varphi} = -\sin \varphi$

also $\frac{d^3 \sin \varphi}{d\varphi^3} = -\frac{d \sin \varphi}{d\varphi} = -\frac{\cos \varphi \, d\varphi}{d\varphi} = -\cos \varphi$

$\frac{d^4 \sin \varphi}{d\varphi^4} = -\frac{d \cos \varphi}{d\varphi} = \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{d\varphi} = \sin \varphi$

$\frac{d^5 \sin \varphi}{d\varphi} = \frac{d \sin \varphi}{d\varphi} = \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{d\varphi} = \cos \varphi$

Von hier an sind die Werthe sogar wiederkehrend, nämlich $\frac{d^6 \sin \varphi}{d\varphi^6} = -\sin \varphi = \frac{dd \sin \varphi}{d\varphi^2}$, u. s. w.

Da man eben so einfache und wiederkehrende Werthe für die höheren Quotienten des $\frac{d \cos \varphi}{d\varphi} = -\sin \varphi$ findet; so wird man sich gerade dieser beiden höheren Quotientenreihen vorzüglich bedienen; und dann lieber durch Reihen-Umkehrung zu gewinnen suchen, was man durch die algebraischen Ausdrücke nur mühsam würde finden können!

Zehntes Capitel.

Lehren der allgemeinen Logarithmik, mit Hülfe der Differentialrechnung strenge erwiesen.

§. 1. Wenn $10^x = y$ ist, so ist $x = \log y$ im gemeinen, Briggischen Systeme, in welchem 10 die Basis ist. Da man 10^x auch als $\left(\frac{10}{1}\right)^x$ betrachten kann, und dieses ein aus dem Grundverhältnisse, $\frac{10}{1}$, x-mal zusammengesetztes Verhältnifs ist; so kann man auch sagen, dafs man im Briggischen Systeme allemal $\left(\frac{10}{1}\right)^x = \frac{y}{1}$ hat, also der Zahl y Logarithme x anzeigt, wie vielmal das Verhältnifs 1:10 zusammengesetzt werden mufs, um das Verhältnifs 1:y zu erhalten. In dieser Hinsicht wird 1:10 das Grundverhältnifs des Briggischen Systemes genannt; wobei sich von selbst versteht, dafs ein gebrochenes x, zum Beispiel $x = \frac{3}{2}$ oder $x = \frac{6}{7}$, nach Theilen des Grundverhältnisses $\left(\frac{10}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{10}{1}}$ oder $\left(\frac{10}{1}\right)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{\frac{10}{1}}$ aufzählend seyn mufs.

§. 2. Auch jedes anderes festgestelltes Logarithmensystem, dergleichen sich Anfänger bis dahin, wo wir auch die Basis veränderlich annehmen möchten, immerhin nur vorzustellen brauchen, mufs irgend ein bestimmtes, festgesetztes Grundverhältnifs haben; und wenn wir dieses ganz allgemein durch 1:b ausdrücken; so mufs in jedem Systeme allemal x der Logarithme des y seyn, wenn $\left(\frac{b}{1}\right)^x = \frac{y}{1}$, oder kürzer geschrieben, wenn $b^x = y$ ist.

Allemal werde ich $x = \mathrm{Log}\, y$ mit einem grossen L schreiben, wenn von so genannten allgemeinen Logarithmen die Rede ist, deren Basis nur allgemein durch b angedeutet wird, auf irgend eine bestimmte Zahl noch nicht eingeschränkt seyn soll.

Dagegen schreiben wir mit einem kleinen l allemal $x = \log y$, wo das Briggische System vorausgesetzt oder verlangt wird, dessen Basis $b = 10$ ist; und mit teutschen Buchstaben schreiben wir $x = \mathfrak{l}\mathfrak{o}\mathfrak{g}\, y$, wo das in Frankreich jetzt so genannte Neperische, sonst so genannte natürliche oder (gleichseitig) hyperbolische System gefordert wird, dessen Basis, mit Vega durch h angedeutet, ein $h = 2{,}71828284\ldots$ seyn muss, wie sich bald ergeben wird.

Den Anfängern wird diese sorgfältige Unterscheidung sehr zu empfehlen seyn; wozu denn in der Kürze auch die drei verschiedenen Buchstaben L, l und $\mathfrak{l}$ schon hinreichen können.

In der Folge, wenn man eingesehen hat, warum man in dem höhern Calcul vorzugsweise der natürlichen Logarithmen sich bedient, wird man sich auch leicht daran gewöhnen, gerade diese durch das gewöhnliche l angedeutet zu wissen. In Teutschland aber, wo man das $\mathfrak{l}$ auch in den Druckereien zur Hand hat, dürfte es gut seyn, dieses beizubehalten.

Lediglich zwischen künstlichen und natürlichen Logarithmen zu unterscheiden, kann wohl nur dem praktischen Gebrauche der beiden tabellirten Systeme genügend scheinen. Unserm allgemeinen Lehrvortrage ist die aufgeführte dreifache Abtheilung angemessen bis zur Exponentialrechnung hin, wo wir den Logarithmen noch die LOGarithmen hinzufügen werden. (XII. §. 17.)

Die logarithmische Linie (Fig. 11).

§. 3. Der Abscissen Anfang sey in O, und OA $=$ OE $= 1$ die angenommene Lineareinheit; dann muſs, wenn b die Grundzahl (Basis) des Systemes bedeutet, die der Abscisse $x = 1$ zugehörige Ordinate $= 1.b^1$ seyn;
die „ „ $x = 2$ „ „ $= 1.b^2$ „
die „ „ $x = 3$ „ „ $= 1.b^3$ „
u. s. w., überhaupt für jede Abscisse OP $= x$ ihre Ordinate PQ $= y = 1.b^x$ seyn, wenn jede Abscisse $x = \text{Log}\, y$ seyn, jede Abscisse den Logarithmen ihrer Ordinate darstellen soll.

§. 4. Die Basis b mag genommen werden, wie sie will: so ist doch allemal $b^0 = 1$, also in jedem Systeme $0 = \text{Log}\, 1$, und daher die der Abscisse $x = 0$ zugehörige Ordinate OA $= 1$, als Ordinate betrachtet $= b^0$, und jede einer negativen Abscisse $\mathfrak{O}\mathfrak{P}$ zugegehörige Ordinate $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ ist kleiner als 1, *vorausgesetzt*, daſs die Basis $b > 1$ genommen wird; wie es in den beiden bestimmten und berechneten Systemen, womit wir es als solchen freilich nur zu thun haben werden, in dem Briggischen und dem Neperischen, allerdings geschehen ist. Daſs kein System eine verneinte Basis $-b$ haben kann und muſs, werde ich in §. 14 und 15. erörtern.

§. 5. In jedem Systeme hat man für die Abscisse OP $= x$ die Ordinate $y = b^x$, also der Abscisse $x^1 = x + \triangle x$ die Ordinate $y^1 = b^{x+\triangle x}$ zugehörig; folglich $\triangle y = b^{x+\triangle x} - b^x = b^x\,(b^{\triangle x} - 1) = y\,(b^{\triangle x} - 1)$.

§. 6. Also $\frac{\triangle y}{\triangle x} = y\,\frac{b^{\triangle x} - 1}{\triangle x}$, daſs also der erste Differenzenquotient dem $y = b^x$ proportional ist: denn der übrige Factor $\frac{b^{\triangle x} - 1}{\triangle x}$ ist eine offenbar constante Gröſse, die nämlich, bei einerlei Basis b und unveränderlicher Abscissenbelegung $\triangle x$,

(I. §. 19.) für alle noch so verschiedene x einerlei bleibt.

Nimmt man z. B. $\Delta x = 1$, so ist dieser Factor $\frac{b^{\Delta x}-1}{1} = b-1$; im Briggischen Systeme also $= 10-1 = 9$; im natürlichen Systeme dagegen $= 2,71828\ldots - 1 = 1,71828\ldots$ (§. 2).

Im Briggischen Systeme hat man also diesen Differentialquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{1} = 1,9 \text{ für } y = 1$$
$$= 2,9 \text{ " } y = 2$$
$$= 3,9 \text{ " } y = 3, \text{ u. s. w.}$$

(würde demnach die dafür gehörige logarithmische Linie bei einerlei Einheit $OE = OA$ noch ungleich stärker als die in Fig. 11. gezeichnete ansteigen müssen, welche dem natürlichen Systeme zugehört, wenn in O der Abscissen-Anfang genommen wird; jedem andern Systeme durch andere angenommene Einheit zugehörig werden könnte).

§. 7. Wenn wir aber die Belegung $\Delta x = dx$ angenommen, und dann zu $= o$ haben werden lassen: so haben wir $\frac{dy}{dx} = y\,\frac{b^{dx}-1}{dx}$ als den noch werdenden, und $\frac{dy}{dy} = y\,\frac{b^{dx}-1}{dx}$ als den genauen Werth dieses Differentialquotienten, unter der seit III. §. 29. uns schon bekannten Bedingung, daſs auch jedes von den mehren in einer Gleichung vorkommenden dx dem andern gleichzeitig $= o$ werdend, und auch in jedem Zeitpuncte dieses o-Werdens die sämmtlichen dx einander gleich groſs gedacht werden. Durch diese immerfort einander gleiche Gröſse der dx, ist es nun einleuchtend, daſs auch der Differential-Ausdruck $\frac{b^{dx}-1}{dx}$, in jedem Zeitpuncte des kleiner werdenden

dx, also auch in dem letzten Zeitpuncte seines wirklichen o-Werdens, eine constante, das heifst, eine von der Veränderlichkeit des x und y unabhängige Gröfse seyn mufs. Und so gewifs, wie wir ferner schon aus Vorerinner. V. §. 15. es wissen, dafs für jedes verschwindende dx, also auch für unser hiesiges dy, als Differential der Abscisse x,

sich $\frac{b^{dx}-1}{dx} = \frac{b-1}{1} - \frac{(b-1)^2}{2} + \frac{(b-1)^3}{3} - +$ (dortige Reihe C)

desgleichen $= \frac{b-1}{b} + \frac{1}{2}\left(\frac{b-1}{b}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b-1}{b}\right)^3 + +$

(nach dortiger noch bequemeren Reihe C) ergeben, und summatorisch convergent, einer endlichen Gröfse sich nähernd seyn mufs: so wird es doch für uns, die wir uns y und x, also auch dy und dx bei der logarithmischen Linie als Linien gedacht, folglich $\frac{dy}{dx}$ als eine unbenannte Zahl zu denken hatten, etwas unschickliches, dimensionenwidriges an sich haben müssen, in der obigen Gleichung $\frac{dy}{dx} = y\frac{b^{dx}-1}{dx}$ unter dem $\frac{b^{dx}-1}{dx}$, dem Factor der Linie y, etwas anders, als einen lineären Divisor zu denken.

§. 8. Daher ist es rathsamer, aus der obigen Gleichung auf $y\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{b^{dx}-1}$ zu schliefsen, und diese Gröfse, welche nach der geometrischen Darstellung (§. 3.) eine durch die Zahl $\frac{dx}{dy}$ multiplicirte Linie seyn mufs, durch eine anschauliche Annäherung finden zu lehren, wozu unter andern Wegen auch ein wiederholtes Quadratwurzelziehen schon hinreichend ist.

Denn wenn wir uns, die Linie b, als $\frac{b}{1}$ durch die

angenommene Lineareinheit gemessen, durch eine Zahl b angegeben gedacht, zuvörderst $\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{b}-1} = \frac{\frac{x}{2}}{b^{\frac{1}{2}}-1}$, ferner $\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{b}}}-1} = \frac{\frac{x}{8}}{b^{\frac{1}{8}}-1}$ u. s. w. gefunden denken: so müssen wir hiedurch dem wahren Werthe des $\frac{dx}{b^{dx}-1} = \frac{0}{b^0-1} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$, immerfort näher und näher gekommen seyn.

Durch ein wiederholtes Kubikwurzelziehen müfsten wir zuvörderst $\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt[3]{b}-1} = \frac{\frac{x}{3}}{b^{\frac{1}{3}}-1}$, dann $\frac{\frac{x}{9}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{b}}-1} = \frac{\frac{x}{9}}{b^{\frac{1}{9}}-1}$ u. s. w., dem wahren Werthe des $\frac{dx}{b^{dx}-1} = \frac{0}{0}$ immerfort näher und näher kommend, erhalten.

§. 9. Hiemit sind wir nicht nur gewifs geworden, dafs $\frac{dx}{b^{dx}-1} = \frac{1}{r(b^{\frac{1}{r}}-1)} = \frac{1}{r(\sqrt[r]{b}-1)}$ desto richtiger sich ergeben mufs, je gröfser r genommen ist (welches übrigens nur nach dem einen hier benutzten Beispiele des wiederholten Quadratwurzelziehens eine ganze und gerade Zahl, und nach dem andern beigebrachten Beispiele eine ganze und dreifache Zahl seyn müfste); sondern wir können nun auch, diese für jedes b uns bestimmbare, und für jedes constante b auch constante Linie $\frac{dx}{b^{dx}-1} = a$ genannt, aus dem Näherungswerthe $a = \frac{1}{rb^{\frac{1}{r}}-r}$ schliefsen, dafs $rb^{\frac{1}{r}} = \frac{ra+1}{a}$, und daher auch $b = \left(1+\frac{1}{ra}\right)^r$ desto genauer richtig seyn mufs, je gröfser r genommen wird.

Durch diese letzte Formel würden wir also, wenn uns $y\frac{dx}{dy} = a$ gegeben wäre, aus dieser Subtangente*) a die Basis b des Systemes finden, und dagegen, vermöge der ersten Formel $a = \frac{1}{\frac{1}{r(b^r - 1)}}$, aus der Basis des Systemes auf die Gröfse seiner Subtangente schliessen können.

Jede von diesen beiden Formeln ist nun auch durchaus geeignet, uns die völligste Ueberzeugung zu gewähren, dafs für jedes Logarithmensystem, dessen Basis b eine unveränderliche, beständige Gröfse seyn soll, auch dessen Subtangente a (in Fig. 11. die PS) eine beständige Gröfse seyn mufs; das heifst für ein noch so kleines x und y schon eben so grofs, als für ein noch so grofses x und y sich ergeben mufs.

§. 10. Falls wir auch späterhin etwa eine von diesen beiden Gröfsen b und a veränderlich annehmen, so sehen wir sogleich aus diesen beiden Formeln, wie dann auch die andere veränderlich ist, und wie sie beide einander unmittelbar functionirt sind. Beide Formeln aber werden kürzer und schärfer durch die Gleichung $a.\alpha\left(b^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) = 1$ dargestellt, welche als Näherungsgleichung ausspricht, dafs sie desto richtiger werde, je gröfser man sich den Factor α, und je kleiner man also den Exponenten $\frac{1}{\alpha}$ sich angenommen denkt.

---

*) Hinter der Vorrede habe ich schon den Rath gegeben, das XIVte Capitel, in welchem die Subtangente als $= y\frac{dx}{dy}$ gefunden wird, schon nach dem VIten Capitel zu benutzen.

§. 11. Von Brigge wurde die Basis $b = 10$, als die bequemste für unser dekadisches Zahlensystem gewählt, wofür sich dann die Subtangente $a = \frac{1}{r(10^{\frac{1}{r}} - 1)} = 0,434294\ldots$ immerfort genauer und genauer ergibt, je gröfser man r annimmt.

Für das natürliche System wird, zu gröfserer Bequemlichkeit in den allgemeinen calculatorischen Ausdrücken gefordert, dafs seine Subtangente $= 1$ seyn soll, woraus denn folgt, dafs dessen Basis $b = \left(1 + \frac{1}{r.1}\right)^r$ (§. 9.) desto genauer gefunden wird, je gröfser man r genommen hat.

Nehmen wir Beispielsweise $r = \frac{1}{10000}$ und erlauben uns, statt des mühsamen wiederholten Wurzelziehens (§. 8.) die Briggischen Logarithmentafeln zu benutzen; so haben wir

$$\log\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = 10000.\ \log 1,0001$$
$$= 10000.\ 0,0000434 = 0,434\ldots$$

Die zu diesem Logarithmen gehörige Zahl findet sich $= 2,71764$, welche nun freilich nur bis $2,71$ schon richtig ist. Denn wenn wir $\frac{1}{r} = \frac{1}{100000}$ genommen hätten: so würden wir genauer $2,71828$ gefunden haben u. s. w.

§. 12. Aber da wir schon wissen, dafs die Gleichung $b = \left(1 + \frac{1}{ra}\right)^r$ zwischen Basis b und Subtangente a, desto richtiger ist, je gröfser r genommen wird: so mufs mit einer unendlich kleinen Unrichtigkeit $b = \left(1 + \frac{1}{\alpha . a}\right)^\alpha$ seyn; daher wir nach dem

binomischen Lehrsatze

$$b = 1 + \alpha \frac{1}{\alpha a} + \frac{\alpha \cdot \alpha - 1}{1.2} \cdot \frac{1}{\alpha \alpha a a}$$
$$+ \frac{\alpha \cdot \alpha - 1 \cdot \alpha - 2}{1.2.3} \cdot \frac{1}{\alpha^3 a^3} + \ldots$$

also $b = 1 + \frac{1}{a} + \frac{\alpha - 1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha a a}$
$$+ \frac{\alpha - 1 \cdot \alpha - 2}{2.3} \cdot \frac{1}{\alpha^2 a^3} + \ldots$$

immer noch mit einer unendlichkleinen Unrichtigkeit; dagegen, wenn wir nun $\alpha = \infty$ genommen fordern, dann mit vollendeter Richtigkeit (Vorer. VIII.)

$b = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2.3a^3} + \frac{1}{2.3.4a^4} + \ldots$ erhalten; für das natürliche Systeme also, dessen Subtangent $a = 1$ seyn soll, die Basis

$$h = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5}$$
$$+ \frac{1}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

Bis auf 12 Glieder dieser Reihe fortgesetzt, wird uns $= 2,7182818$ in diesen Stellen schon richtig geben.

§. 13. Durch h werden wir fernerhin diese Basis der natürlichen Logarithmen andeuten, da eben diese auch die hyperbolischen heifsen. Mag immerhin dieser Name aus zu eingeschränkten Vorstellungen beim (ersten aufgefundenen) Quadriren der (gleichseitigen) Hyperbel entstanden seyn: so müssen wir ihn doch ebenfalls kennen, und mit ihm wird die Bedeutung des h dem Gedächtnisse eingeprägt. Mit andern Mathematikern e statt h zu gebrauchen, hat das Bedenken gegen sich, dafs man gerade des Buchstabens e für manche andere Denominationen ungern entbehren wird. Auch sind die Praktiker in Teutschland durch Vega's Tafeln schon an h gewöhnt.

Da die Subtangente des hyperbolischen Systemes $= 1$ ist: so braucht man nicht erst auf eine noch kürzere Andeutung derselben zu denken; so wie für das Briggische System dagegen die Basis 10, durch diese Zahl selbst schon leicht zu schreiben ist. In Hinsicht seiner Subtangente hat man eingeführt, durch M die Zahl 0, 334294... anzudeuten, welche angibt, dafs die Subtangente des Briggischen Systemes $=$ M mal 1, also M mal die Subtangente des hyperbolischen Systemes ist, und in Hinsicht dieses einfachsten Systemes der Modul, die Maafszahl des Briggischen Systemes heifst.

§. 14. Für die gemeine Arithmetik, in welcher durch $+$ und $-$ nur Addiren und Subtrahiren angedeutet wird, bejahte und verneinte Zahlen als solche nicht vorkommen, würde es nicht nur unnöthig, sondern fast unschicklich seyn zu erinnern, dafs die Basis niemals verneint darf angenommen werden; es kann ja dort von nichts, als ihrer so genannten absoluten Gröfse die Rede seyn. Für die algebraische Arithmetik aber, mit welcher wir in unserm allgemeinen Calcul es zu thun haben müssen, ist es rathsam, es ausdrücklich darzuthun, dafs in keinem logarithmischen Systeme die Basis verneint angenommen werden darf.

§. 15. Denn wenn b die Basis seyn soll, so soll ja $\frac{b}{1}$ diejenige Verhältnifs-Einheit seyn, welche für alle übrigen Verhältnisse $\frac{y}{1}$ vermittelst der Gleichung $\frac{y}{1} = \left(\frac{b}{1}\right)^x$ als Maafseinheit gebraucht werden soll; und nun habe ich schon in Algebraischer Auflösung, Theil 1. Freyberg 1808. S. 78. §. 110. erörtert, dafs für das $\pm$ der Algebra die Einheit noth-

wendig bejaht muſs angenommen werden. Obgleich ich dort noch nicht Veranlassung hatte, auch der logarithmischen Einheit zu erwähnen, so ist doch auch diese sehr offenbar meinen dortigen Gründen mit unterworfen.

Da nun bei einem bejahten $\frac{b}{1}$, Falls es, wie in den beiden tabellarisch vorhandenen Systemen (§. 4.), gröſser als 1 angenommen ist, in jedem $b^x = y$ alle bejahte oder verneinte Logarithmen x für bejahte y gröſser oder kleiner als 1 gehören; falls aber solches $\frac{b}{1}$ kleiner als 1 angenommen würde, dann in jedem $b^x = y$ alle bejahte oder verneinte Logarithmen x, für bejahte Zahlen kleiner oder gröſser als 1 gehören müſsten: so ist es einleuchtend, daſs es in jedem für die Algebra zulässigen Systeme weder einen bejahten noch einen verneinten Logarithmen geben kann, der einem verneinten y zugehören könnte.

Da ich nun ferner anderweitig (z. B. in der Algebraischen Auflösung, 1806.) auch erwiesen habe, daſs neben den algebraisch bejahten und verneinten Gröſsen auch jede absolut gegebne Gröſse nothwendig als bejaht behandelt werden muſs: so müssen nun alle Logarithmen verneinter Zahlen lauter unmögliche Gröſsen ausmachen; unmögliche Gröſsen, eben so, wie das algebraische $\sqrt{-1}$ deshalb unmöglich ist, weil es weder eine bejahte, noch eine verneinte 1 seyn kann, ohne mit der in der Algebra angenommenen, und beizubehaltenden Definition ihrer Quadratwurzeln in Widerspruch zu gerathen; und die transcendente Gröſse $\sin\varphi$, sobald sie gröſser als der Halbmesser gefordert würde, ein unmöglicher Sinus heiſsen müſste, weil es dem Begriffe des Sinus wi-

derspricht, für irgend einen Winkel φ einen Sinus gröfser als den Halbmesser haben zu können.

§. 16. Dessen ungeachtet ist es in der algebraischen Gleichungslehre zu ihrer systematischen Ueberschauung schlechterdings nothwendig, die Formen ihrer unmöglichen Würzeln mit zuzulassen; zur Verbindung mit diesen Gleichungslehren wird es in der Logarithmik nothwendig zuzugestehen, dafs jeder bejahten Zahl, aufser ihrem einen möglichen Logarithmen in jedem Systeme auch unendlich viele unmögliche zugehören; und in der Differential- und Integralrechnung sind namentlich die trigonometrischen und logarithmischen Unmöglichkeiten durch ihre gegenseitigen Beziehungen äufserst nützlich geworden, indem auch dort, durch Verbindung mehrer unmöglichen Gröfsen, wiederum mögliche, unmittelbar brauchbare Resultate sich ergeben, und zwar, wie wir in dem nächstfolgenden Capitel sorgfältig zu erörtern suchen werden, dergestalt sich ergeben, dafs zugleich gewisse Gränzen ihrer Möglichkeit dabei erhellen, welche ohne jene Verdindung unbemerkt bleiben könnten.

Logarithmen eines Productes.

§. 17. Die Basis b sey nun, welche bejahte Gröfse sie wolle: so mufs, wenn $y = b^x$ und $z = b^u$ und $v = b^w$ ist, auch $y.z.v = b^{x+u+w}$ seyn; mufs also, indem x, u, und w die Logarithmen des y, z und v in einerlei b Systeme sind, auch $x+u+w$ der Logarithme des Productes y. z. v in demselben Systeme seyn.

Für jeden der Factoren y, oder z, und s.w., welcher kleiner als 1 wäre, würde in den beiden tabellarisch gangbaren Systemen, dem Briggischen und

dem natürlichen, der Logarithme x oder u, u. s. w. eine **verneinte** Zahl seyn; allemal aber wird die **algebraische** Summe aus den Logarithmen aller Factoren den Logarithmen des Productes ausmachen.

Logarithmen eines Quotienten.

§. 18. Im allgemeinen Calcul ist es oftmals rathsam, z. B. den Quotienten $\frac{z}{v}$ als ein Product $z.\frac{1}{v}$ zu betrachten. Der Erfolg für die Logarithmik ist einerlei, ob ich schliefse, dafs $\frac{z}{v} = \frac{b^u}{b^w} = b^{u-w}$ ist,

oder ob ich schliefse, dafs $z.\frac{1}{v} = b^u . b^{-w} = b^{u-w}$ seyn mufs. In jedem Falle ergibt sich (§. 1.) dafs $u - w = \text{Log}\frac{z}{v}$ in **eben dem** Systeme seyn mufs, in welchem $u = \text{Log}\, z$ und $w = \text{Log}\, v$ ist; auch wenn v kleiner als 1, also in den beiden gangbaren Systemen, w eine verneinte, folglich $-w$ eine bejahte Zahl wäre; und allemal ist $u - w$ die **algebraische** Differenz, $\text{Log}\, z - (\text{Log}\, v)$, also die algebraische **Summe** aus $\text{Log}\, z$ und der **Gegengröfse** des $\text{Log}\, v$.

Logarithmen der 0.

§. 19. Da überhaupt

$\frac{1}{y} = y^{-1}$, also auch $\text{Log}\frac{1}{y} = -\text{Log}\, y$, und daher auch wenn y eine immerfort gröfser und gröfser werdende Zahl ∞ bedeutet, immerfort $\text{Log}\frac{1}{\infty} = -\text{Log}\,\infty$ seyn mufs: so mufs nach dem Gesetze der Stetigkeit auch $\text{Log}\frac{1}{\infty} = -\text{Log}\,\infty$, das ist $\text{Log}\, 0 = -\text{Log}\,\infty$ seyn.

Da nun in den beiden tabellarisch gangbaren Systemen, in dem Briggischen und dem natürlichen, die Basis (10 und $h = 2,718\ldots$) gröfser als 1, folglich der Logarithmen eines jeden $y > 1$ ein bejahter Logarithmen, sehr gewifs also auch der $\log \infty$ und $\log \infty$ ein bejahter Logarithmen seyn mufs; und da überdies auch sich ergiebt, dafs jeder dieser beiden Logarithmen selbst eine unendlich gröfse Zahl in ihrer Art seyn mufs: so hat es mit der gewöhnlichen Behauptung, dafs $\text{Log } 0 = -\infty$ sey, allerdings seine Richtigkeit, wenn man nur auf diese beiden gangbaren Systeme Rücksicht nehmen wollte.

Aber in unauflösliche Schwierigkeiten und calculatorische Widersprüche müfste gerathen, wer die Behauptung, dafs $\text{Log } 0 = -\infty$ sey, als allgemein geltend verstehen wollte; da doch in jedem Systeme, dessen Basis b kleiner als 1 wäre, $\text{Log } 0 = +\infty$ seyn müfste; womit sich dann auch sehr gut verträgt, dafs für $b = 1$ auch $\text{Log } 0 = 0$ seyn, das heifst, alle logarithmische Maafsbestimmung dann wegfallen würde.

Logarithmen einer Potenz.

§. 20. Ebenfalls ganz allgemein mufs $\text{Log } y^n = n.\text{Log } y$ seyn, der Exponent n und die Stammgröfse y mögen seyn, was sie wollen, und der Logarithmen des y mag einem Systeme zugehören, welchem er will. Denn sey b die Basis, so ist $x = \text{Log } y$, wenn $b^x = y$, folglich $b^{xn} = y^n$, folglich $nx = \text{Log. } y^n$ ist. (§. 1.)

Im Briggischen Systeme hat man $b = 10$, also $x = \log y$, wenn $10^x = y$, folglich $10^{nx} = y^n$ ist, und demnach $nx = \log y^n$.

Das andere berechnete, das natürliche System, hat $b = h = 2,718\,28\ldots$, also $x = \log y$, wenn $h^x = y$ ist; folglich $h^{nx} = y^n$, und demnach $nx = \log. y^n$.

Anmerkung.

§. 21. Alle diese und ähnliche Lehren der allgemeinen Logarithmik werden auch von Anfängern ohne Schwierigkeit begriffen werden, wenn sie schon bei ihrer ersten Erlernung des Briggischen Systemes, auch die dortigen Logarithmen als Potenzexponenten der dortigen Stammgröfse und Basis $b = 10$ zu betrachten angeleitet sind; wie es schon in der ersten Auflage meines Unterrichts in der algebr. Auflösung 1782. Thl. 2. geschehen ist. Dergleichen erste Einleitung in die Logarithmenlehre würde freilich von denen nachgeholt werden müssen, welche ihren Gebrauch blos auf die mühselige und lückenvolle Vergleichung arithmetischer und geometrischer Reihen begründet haben. Diese Vergleichung befriedigend auszufüllen erfordert, auf die Theorie der Interpolirung eine Zeit verwandt zu haben, welche die Practiker für andere Theorien ersparen können, die ihnen nöthiger sind.

Die nunmehr folgenden Lehren würden einem Anfänger kaum begreiflich werden, wenn er nicht die Logarithmen als Potenzexponenten zu betrachten geübt wäre.

Zwei Lehrsätze sammt Beweis.

§. 22. Wenn in irgend einem künstlichen Systeme (das heifst, in einem Systeme, dessen Basis b von $h = 2,718\ldots$ dieser Basis des natürlichen Systemes, verschieden ist,) $x = \text{Log} y$, und für dasselbe y im natürlichen Systeme $\xi = \log y$ ist: so mufs

$b^x = y$ und $h^\xi = y$, folglich $b^x = h^\xi$ seyn;

mufs daher (§. 19.) wenn wir uns

erstens der b-Logarithmen bedienen,

$x \cdot \text{Log}\, b = \xi \cdot \text{Log}\, h$ seyn, und dagegen

zweitens $\xi \log b = \xi \log h$ seyn, wenn wir die h-Logarithmen gebrauchen.

Da nun in jedem Systeme der Logarithme seiner Basis $=1$ ist (§. 4), hier also $\text{Log}\, b = 1$ und $\log h = 1$ ist: so haben wir

I) $x = \frac{\text{Log}\, h}{1} \cdot y$ und II) $y = \frac{\log b}{1} \cdot x$, als die beiden bezielten Lehrsätze.

Folgerungen.

§. 23. Da $\frac{\text{Log}\, h}{1}$ und $\frac{\log b}{1}$ zwei beständige, vom x und y unabhängige Gröſsen sind; so hat man auch, x und y veränderlich gedacht,

$$1)\quad dx = \frac{\text{Log}\, h}{1}\, dy,$$

$$\text{also auch } y\frac{dx}{dy} = \frac{\text{Log}\, h}{1} \cdot y\frac{dy}{dy}$$

$$\text{das ist, } a = \frac{\text{Log}\, h}{1} \cdot 1.$$

$$\text{und } 2)\quad dy = \frac{\log b}{1}\, dx,$$

$$\text{also auch } y\frac{dy}{dy} = \frac{\log b}{1} \cdot y\frac{dx}{dy}$$

$$\text{das ist, } 1 = \frac{\log b}{1} \cdot a$$

$$\text{also } a = \frac{1 \cdot 1}{\log b}.$$

Anwendung auf das Briggische System.

§. 24. Das künstliche System sey das Briggische, dessen Basis $b = 10$ ist; so wird dessen Subtangente a

nach 1) als $= \log h = \log 2{,}7182818 = 0{,}4342948$

nach 2) als $= \frac{1}{\log 10} = \frac{1}{2{,}3025850} = 0{,}4342948$

gefunden.

§. 25. Auch in §. 22. das b System auf das Briggische $b = 10$ eingeschränkt, haben wir

I) $x = \frac{\log h.}{1} \cdot y = (0,43429\ldots) \cdot y$

d. i. $\log y = 0,43429\ldots \cdot \log y$

II) $y = \frac{\log 10}{1} \cdot y = (2,3025\ldots) x$

d. i. $\log y = 2,3025\ldots \cdot \log y$

y mag seyn, welche Zahl es will.

Hiemit liegt vor Augen I), dafs man durch den Factor 0,434... den hyperbolischen Logarithmen des y multipliciren mufs, um den Briggischen Logarithmen derselben Zahl y zu erhalten; und II) dafs man durch den Factor 2,3025... den Briggischen Logarithmen des y multipliciren mufs, um den hyperbolischen Logarithmen desselben y zu erhalten.

§. 26. Obgleich nun diese Multiplicationen uns dadurch erleichtert werden, dafs man das 2 fache, 3 fache ... 8 und 9 fache dieser Factoren, in den Tafeln aufgeführt findet: so dürfte es doch meistens weniger Mühe erfordern, wenn man vermittelst der gewöhnlichen Briggischen Logarithmen schliefst,

aus I) dafs $\log(\log y) = \log 0,43429 + \log(\log y)$
$= 0,6377843 - 1 + \log(\log y)$
also $= \log(\log y) - 0,3622157$ ist;

aus II) dafs $\log(\log y) = \log 2,3025850 9 + \log(\log y)$
$= \log(\log y) + 0,3622000$ ist.

§. 27. Zur vorläufigen, ungefähren Ueberschlagung, wie sie während des Calculs oftmals räthsam ist, kann man sehr bequem benutzen, dafs

ungefähr I) jeder Briggische $\log y = \frac{2}{5} \cdot \log y$

und II) jeder hyperbolische $\log y = \left(2 + \frac{1}{3}\right) \cdot \log y$ ist.

§. 28. Indem man der Kürze wegen, $M = 0,43429\ldots$ und $h = 2,71828\ldots$ bedeuten läſst, und vorzüglich den Satz, daſs jeder Log Briggii $y = M.\,\mathrm{Log\,nat}\,y$, oder kürzer geschrieben, jeder $\log y = M.\,\mathfrak{log}\,y$ ist, dem Gedächtnisse einprägt: so weiſs man damit auch, daſs $y = 10$ gesetzt, $\log y = M.\,\mathfrak{log}\,10$, d. i. $1 = M\,\mathfrak{log}\,10$ ist, und daſs $y = h$ gesetzt, $\log h = M.\,\mathfrak{log}\,h$, d. i. $\log h = M.\,1$ seyn muſs.

§. 29. Indessen pflegt man bisweilen nicht nur den Ausdruck $\log 10$, besonders aber $\mathfrak{log}\,h$, lieber in dem Calcul zu behalten, als durch $= 1$ ihn aufzuführen; sondern auch, wo man bloſs 1 in dem Calcul gewonnen hat, lieber $\mathfrak{log}\,h$ (oder nach Befinden auch wohl $\log 10$) statt der 1 zu schreiben, wo man logarithmisch gleichartige Ausdrücke dadurch vors Auge bringen, und mit ihnen weiter schlieſsen kann und will.

§. 30. Aus den wenigen Sätzen, daſs $y\frac{dx}{dy} = a$, nämlich die Subtangente a in jedem logarithmischen Systeme für alle seine Logarithmen x und dadurch logarithmisirte Zahlen y, einerlei unveränderliche Gröſse, auch diese Gröſse durch die Basis b des Systemes und umgekehrt b durch a bestimmt wird (§. 9), kann nun durch dahin gehörige Lehren des wahrhaften Infinitesimalcalculs, mit völliger Strenge und Kürze, also auch mit voller Deutlichkeit, alles dargethan werden, was wir von der Logarithmik irgend zu wissen nöthig haben, und mit Recht verlangen können.

Da wir z. B. aus der obigen Formel den ersten Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{a}$, und aus diesem schon durch bloſse algebraische Differenziirung auch die folgenden $\frac{ddy}{dx\,dx}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$, u. s. w. zu finden wissen: so

haben wir hiemit gleichsam die feinsten Keime für jede Abhängigkeit einer logarithmisirten Zahl von ihrem Logarithmen in Händen, und werden daraus vermittelst der Lehren im XIten Capitel für jeden gegebnen Logarithmen die ihm zugehörige Zahl y hinreichend genau zu finden wissen.

Eben so auch wird sich der Logarithme x als Function des y betrachtet, durch den Differentialquotienten $\frac{dx}{dy} = \frac{a}{y}$ und die daraus folgenden höheren, $\frac{d^2x}{dy^2}; \frac{d^3x}{dy^3} \ldots$ nach denselben Lehren der Möglichkeit gemäfs bestimmen lassen.

Noch kürzer und netter werden wir späterhin, vermittelst der ebenfalls völlig strengen Integralrechnung aus dem Differentiale $dx = a\frac{dy}{y}$ auf x als Function des y zu schliefsen, und umgekehrt für jedes bejahte y seinen möglichen Logarithmen zu finden wissen.

Mühsamer und nicht so leicht in ihrem ganzen Zusammenhange zu durchschauen, sind die Schlüsse, durch welche wir im Verfolg dieses Capitels einige convergente Reihen für y als Function ihres Logarithmen x finden werden, indem sie einige durch elementarische Analyse schon entwickelte Reihen voraussetzen müssen; die ich aber für einige Leser dennoch mit aufführen wollte. Ich sage für einige Leser, wie es die folgende Anmerkung, den Uebergang zum bequemen differenziiren logarithmischer Gröfsen betreffend, erläutern wird.

Anmerkung.

§. 31. Da $y\frac{dx}{dy} = a$ ist, wenn a die Subtangente im beliebigen b-Systeme, und $x = \text{Log}y$ bedeutet: so

hat man auch eben so allgemein, dafs $dx = a\frac{dy}{y}$, das ist $d\,\mathrm{Log}\,y = a\frac{dy}{y}$ seyn mufs. Will man aber daraus folgern, dafs man, y möge seyn, welche Function es wolle, ihr Differential dy durch die Function y selbst zu dividiren, und mit der Subtangente des Systemes zu multipliciren habe, um das Differential des Log y zu erhalten: so mufs doch dagegen das Bedenken eintreten, dafs wir nach allen bisher vorangegangenen Darstellungen nur veranlafst gewesen sind, uns y als Zahlen, auch deren Logarithmen x ebenfalls als Zahlen (und bei der logarithmischen Linie, die Verhältnisse dieser Zahlen in den dortigen Ordinaten und Abscissen durch Linien) ausgedrückt zu denken!

Allerdings mag dieser Uebergang dadurch gerechtfertigt werden, dafs doch am Ende jedes Verhalten zwischen Functionen durch Zahlverhältnisse müsse abgethan werden können; für alle algebraische Functionen, weil deren Verhalten durch die algebraischen Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens, Dividirens und Potenzirens unmittelbar bestimmbar ist; für alle transcendente, weil man sie sämmtlich durch algebraische Operationen, wenigstens Näherungsweise abzureichen wissen mufs, um sie dem Calcül zu unterwerfen; und selbst auch bei unmöglichen Gröfsen ihre Unmöglichkeit darin besteht, dafs dergleichen sich widersprechende Operationen für sie verlangt werden, und sie eben diesem Widerspruche gemäfs zu beurtheilen und zu behandeln sind.

Soll aber diese Rechtfertigung uns gehörig einleuchten, so mufs dem Infinitesimalcalcul eine sehr umständliche elementarische Theorie der Reihen vorangeschickt seyn, welche allein genommen so viele Zeit und Anstrengung erfordert, dafs die meisten von

denen, welche Differential- und Integralrechnung der praktischen Anwendung wegen erlernen wollen, dadurch müfsten zurückgeschreckt werden, indefs dagegen viel mühselige Elementar-Mathematik gerade dadurch erspart werden kann, dafs man die ersten Gründe des Infinitesimal-Calculs auf sie anwendet; wie es so eben für einige Lehren der allgemeinen Logarithmik geschehen ist.

Durch den nachfolgenden Theil dieses Capitels wird das angeführte Bedenken, so viel es in der Kürze möglich ist, hinreichend gehoben seyn. Indessen mögen Anfänger, die zur Anwendung eilen wollen, diesen übrigen Theil überschlagen. Wenn eins von beiden erspart werden soll, so scheint es mir rathsamer, die allgemein ausgedrückten nun folgenden Lehren fürs erste unbeachtet zu lassen, als der anschaulichen Darstellungen durch die logarithmische Linie zu entbehren, deren in manchen neueren Lehrbüchern kaum noch erwähnt wird.

Erklärung.

§. 32. Wenn $bX=Y$ ist, so wird X des b-Systemes logarithmisirende Function, oder kürzer, der Logarithmen für Y, und Y die logarithmisirte Function genannt.

Jede von diesen beiden Functionen kann als die gegebne, die andere dann als die gesuchte betrachtet werden, wodurch es sogleich einleuchtet, dafs, wenn die eine eine Function von mehren veränderlichen Gröfsen ist, die andere ebenfalls irgend eine Function von denselben veränderlichen Gröfsen seyn mufs; und durch die folgenden beiden Lehrsätze werden auch dergleichen gegenseitige Functionirungen bestimmt.

Erster Lehrsatz.

§. 33. Es mag $X = 1.x$, oder irgend eine andere Function von x, oder auch irgend eine Function von noch mehren andern veränderlichen Gröfsen seyn, allemal hat man

I) $Y = b^X = 1 + \frac{X}{1.a} + \frac{X^2}{2.a^2} + \frac{X^3}{2.3a^3} + \frac{X^4}{2.3.4a^4} + \ldots$

dessen a vom X ganz unabhängig, für alle X und Y einerlei bleibt, nur mit b veränderlich seyn würde, bei einem unveränderlich gegebenen b also selbst auch eine constante, und als $= \frac{y\,dX}{dY}$ eine der X gleichartige Gröfse ist, und daher die *Subtangente* an jeder Curve seyn würde, welche die X und Y zu orthogonalen Abscissen und Ordinaten hätte. (Obgleich nun die obige Darstellung einer solchen Curve in einer Ebne nicht allemal Statt findet, wo X und Y Functionen von mehren veränderlichen Gröfsen sind: so kann man doch gar wohl die Gröfse a fernerhin in der Kürze die Subtangente nennen, weil sie ja allemal eine den Logarithmen X gleichartige, und von ihrer Veränderlichkeit unabhängige, constante Grösse bleibt; diese beiden Eigenschaften jener wirklichen Subtangente an der logarithmischen Linie aber gerade die einzigen sind, von welchen wir bei der fernern Benutzung der Logarithmik für das differenziiren logarithmischer Gröfsen Gebrauch zu machen haben.)

Ein einzelner Fall der vorigen allgemeinen Reihe ist

II) $Y = h^{\mathfrak{X}} = 1 + \frac{\mathfrak{X}}{1} + \frac{\mathfrak{X}^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{X}^3}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{X}^4}{1.2.3.4} + \ldots$

wo h die Basis des hyperbolischen Systems bedeutet, dessen Subtangente $= 1$ ist.

Wiederum ein einzeler Fall dieser IIten Reihe ist für $\mathfrak{B}=1$

III) $h=h^1=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\ldots$

welche z. B. bis auf 12 Glieder fortgesetzt, des hyperbolischen Systemes Basis $h=2,7182818\ldots$ in diesen Decimalstellen schon richtig gibt.

Beweis für I.

§. 34. Nach dem allgemeinen binomischen Lehrsatze (Vorerrinn. V. §. 1.) muſs

$$b^X=(1+[b-1])^X=1+\frac{X}{1}(b-1)+\frac{X.X-1}{1.2}(b-1)^2+\frac{X.X-1.X-2}{1.2.3}(b-1)^3+\ldots$$

seyn, wodurch sogleich vor Augen liegt, daſs

$b^X-1=\mathfrak{A}X+\mathfrak{B}X^2+\mathfrak{C}X^3+\mathfrak{D}X^4+\ldots$

gesetzt werden kann, nämlich b^X-1 durch eine Reihe dieser Form muſs ausgedrückt werden können, deren Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}\ldots$ vom X unabhängige Gröſsen sind, und deren Glieder von der Function nichts anders, als ganze bejahte Dignitäten derselben enthalten können; weil ja die für die Reihe b^X erlangten Multiplicirungen in jedem einzelen Gliede sehr einleuchtend nicht ein einziges X^r bewirken können, dessen r etwas anders als eine ganze bejahte Zahl wäre.

Da hierin, wegen Allgemeinheit des binomischen Lehrsatzes, X jede beliebige Function seyn kann: so kann sie auch ein beliebiges ΔX seyn, muſs also auch $b^{\Delta X}-1=\mathfrak{A}.\Delta X+\mathfrak{B}.\Delta X^2+\mathfrak{C}.\Delta X^3+\mathfrak{D}.\Delta X^4+\ldots$ seyn.

Sey nun $Y=b^X$ (also $X=\mathrm{Log}\,Y$ und Y die dem Logarithmen X im b-Systeme zugehörige logarithmisirte Function) auch ΔY die Differenz des Y, wenn deren Logarithme X mit der Differenz ΔX belegt

wird: so ist $Y + \Delta Y = b^{x+\Delta x} = b^x . b^{\Delta x} = Y . b^{\Delta x}$ also $\Delta Y = Y . b^{\Delta x} - Y = Y . (b^{\Delta x} - 1)$ und daher der Differenzenquotient

$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = Y . \{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\Delta X + \mathfrak{C} . \Delta X^2 + \mathfrak{D} . \Delta X^3 + \ldots\}$; folglich wenn $\Delta X = dX$ gesetzt, und dieses $= o$ geworden ist, der Differenzenquotient $\frac{dY}{dX} = Y . \mathfrak{A}$.

Da hieraus $Y \frac{dX}{dY} = \frac{1}{\mathfrak{A}}$ folgt, also die Subtangente $Y \frac{dX}{dY}$ als $= \frac{1}{\mathfrak{A}}$ durch den obigen Coefficienten $\mathfrak{A}$ bestimmt, eine von der Veränderlichkeit des X und Y unabhängige, übrigens aber, da dY dem Y gleichartig seyn muſs, allerdings eine dem dX, folglich auch dem X gleichartige Gröſse seyn muſs; so würden wir sie in dieser Hinsicht lieber durch A bezeichnen. Bleiben wir indessen dem in diesem ganzen Capitel schon dafür gebrauchten a getreu: so haben wir nun wiederum $Y \frac{dX}{dY} = a$, und daher auch $\frac{dY}{dX} = \frac{Y}{a}$.

Da nun aus dem im Anfange des Beweises schon erwiesenen

$$Y = 1 + \mathfrak{A}X + \mathfrak{B}X^2 + \mathfrak{C}X^3 + \mathfrak{D}X^4 + \ldots$$

auch $\frac{dY}{dX} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}X + 3\mathfrak{C}X^2 + 4\mathfrak{D}X^3 + \ldots$ sich ergibt, diese Reihe also der Reihe

$$\frac{Y}{a} = \frac{1}{a} + \frac{\mathfrak{A}}{a}X + \frac{\mathfrak{B}}{a}X^2 + \frac{\mathfrak{C}}{a}X^3 + \frac{\mathfrak{D}}{a}X^4 + \ldots$$

gleich, und da sie überdies ihr ähnlich ist, auch congruent, das heiſst, in ihren einzelen Gliedern ihr gleich seyn muſs: so muſs nicht nur $\mathfrak{A} = \frac{1}{a}$, sondern

auch $2\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{a} = \frac{1}{a^2}$, also $\mathfrak{B} = \frac{1}{2a^2}$, ferner $3\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{a}$, also $\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{3a^3}$ u. s. w. seyn, womit die 1te Reihe des Lehrsatzes erwiesen ist.

Für die übrigen beiden Reihen ist es schon im Lehrsatze mit angezeigt, wie sie nur einzele Fälle der 1ten ausmachen.

Aufgabe.

§. 35. Die Reihe I umzukehren, das heifst, die X als Function des Y ausgedrückt zu finden, nachdem in I) die Y als Function des X dargestellt ist.

Durch den folgenden Lehrsatz wird die Aufgabe dreifach beantwortet. Die dabei benutzte Methode der Umkehrung wird späterhin in einem besondern Capitel umständlich erörtert werden.

Zweiter Lehrsatz.

§. 36. Wie vorhin sey $b^X = Y$, also $X = \text{Log}Y$ im beliebigen b-Systeme, dessen Subtangente $= a$ heifse: so läfst sich unter der Bedingung, dafs Y nur bejaht, nicht verneint sey, erweisen,

I) dafs $X = a.\left\{(Y-1) - \frac{(Y-1)^2}{2} + \frac{(Y-1)^3}{3} - \frac{(Y-1)^4}{4} \ldots\right.$

II) auch $X = ma.\left\{(Y^{\frac{1}{m}}-1) - \frac{(Y^{\frac{1}{m}}-1)^2}{2} + \frac{(Y^{\frac{1}{m}}-1)^3}{3} - \frac{(Y^{\frac{1}{m}}-1)^4}{4} \ldots\right.$

III) auch $X = s.a. \left\{ \frac{Y-1}{Y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{Y-1}{Y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{Y-1}{Y+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{Y-1}{Y+1}\right)^7 \ldots \right.$ ist.

Beweis für I.

§. 37. Wenn $X = K + AY + BY^2 + CY^3 \ldots$ seyn sollte, so würde, da für $Y = 1$ dessen Logarithme $X = o$ seyn muſs, das constante, von der Veränderlichkeit des X unabhängige Glied $K = -(A + B + C + \ldots)$ seyn müssen. Demnach muſs $Y - 1$ statt Y gesetzt eine von den unzählig vielen Functionen des Y seyn, welche in Hinsicht des constanten K uns $X = A(Y-1) + B(Y-1)^2 + C(Y-1)^3 + \ldots$ gewähren könnte, indem ja für $Y = 1$ der constante Theil dieser Reihe allerdings $= -A - B - C - \ldots$ sich ergibt.

Soll nun aber diese Reihe bei allen Werthen des Y richtig seyn: so muſs sie

auch $\frac{dX}{dY} = A + 2B(Y-1) + 3C(Y-1)^2 + 4D(Y-1)^3 + \ldots$

auch $\frac{ddX}{dY^2} = 2B + 2.3.C(Y-1) + 3.4D(Y-1)^2 + \ldots$

auch $\frac{d^3X}{dY^3} = 2.3.C + 2.3.4.D(Y-1) + \ldots$

u. s. w. für alle Werthe des Y, also auch für $Y = 1$ gewähren; muſs daher

$(Y=1)$ $(Y=1)$ $(Y=1)$

$A = \frac{dX}{dY}$; $B = \frac{ddX}{2.dY^2}$; $C = \frac{d^3X}{2.3.dY^3}$ seyn, u. s. w., indem wir durch die übergeschriebenen Parenthese $(Y=1)$ andeuten wollen, daſs in dem darunter stehenden Ausdrucke jedes Y desselben $= 1$ gesetzt werden soll.

Da wir nun aus der Gleichung $Y\frac{dX}{dY} = a$ (§. 31.) folgern können,

daſs $\frac{dX}{dY} = \frac{a}{Y}$; $\frac{ddX}{dY^2} = -\frac{a}{Y^2}$; $\frac{d^3X}{dY^3} = \frac{a}{2Y^3}$; $\frac{d^4X}{dY^4} = -\frac{a}{2.3\,Y^4}$

für $Y = 1$ also $\prime = a$; $\prime = -a$; $\prime = \frac{a}{2}$; $\prime = -\frac{a}{2.3}$

u. s. w. seyn muſs: so sind diese Werthe der Differentialquotienten auch durchaus hinreichend zu bestimmen,

daſs $A = a$; $B = -\frac{a}{2}$; $C = \frac{a}{3}$; $D = -\frac{a}{4}$ u. s. w. seyn muſs; daher nun die im Anfange des Beweises nur problematisch aufgestellte Reihe

als $X = a(Y-1) - \frac{a}{2}(Y-1)^2 + \frac{a}{3}(Y-1)^3 - \frac{a}{4}(Y-1)^4 \ldots$ gefunden ist; die Ite Reihe des Lehrsatzes.

Auf bejahte Werthe aber ist Y eingeschränkt, weil zum Beweise die Gleichung der Subtangente $a = Y\frac{dX}{dY}$ gebraucht ist, in welcher Y keine verneinten Werthe haben kann, §. 14.

Beweis für II.

§. 35 Da nun wenn $b^x = Y$ ist, auch $b^{\frac{x}{m}} = Y^{\frac{1}{m}}$ also $\frac{X}{m} = \text{Log}\, Y^{\frac{1}{m}}$, folglich $X = m\, \text{Log}\, Y^{\frac{1}{m}}$ seyn muſs: so hat man aus I) auch die IIte Reihe

$$X = ma\left\{(Y^{\frac{1}{m}} - 1) - \frac{(Y^{\frac{1}{m}} - 1)^2}{2} + \frac{(Y^{\frac{1}{m}} - 1)^3}{3} - \frac{(Y^{\frac{1}{m}} - 1)^4}{4} \ldots\right.$$

deren m im $Y^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{Y}$ für jedes

noch so grofse Y allemal grofs genug kann angenommen werden, dafs $Y^{\frac{x}{m}} - 1 < 1$, also die Reihe bei jedem bejahten Y summatorisch convergent seyn mufs; und andere als bejahte Y können nicht logarithmisirt werden.

Beweis für III.

§. 36. In I) ist $X = \text{Log}\, Y = a\left\{(Y-1) - \frac{(Y-1)^2}{2} + \frac{(Y-1)^3}{3} - \frac{(Y-1)^4}{4} \ldots\right\}$

also 1) hierin $Y = 1 + U$ gesetzt, dann 2) auch $Y = 1 - U$ gesetzt, welches unter dem Beding, dafs U kleiner als 1 sey, ebenfalls erlaubt ist, weil Y auch jeden bejahten Bruch bedeuten kann; haben wir

1) $\text{Log}\,(1+U) = a\left\{U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} - \frac{U^4}{4} + \ldots\right.$

2) $\text{Log}\,(1-U) = a\left\{-U - \frac{U^2}{2} - \frac{U^3}{3} - \frac{U^4}{4} - \ldots\right.$

also $\text{Log}\frac{1+U}{1-U} = 2a\left\{U + \frac{U^3}{3} + \frac{U^5}{5} + \frac{U^7}{7} + \ldots\right.$

Mag nun Y seyn, welche bejahte Function es will: so hat man $\frac{1+U}{1-U} = Y$, wenn man $U = \frac{Y-1}{Y+1}$ setzt, welches auch der Bedingung, dafs $U < 1$ sey, Genüge leistet, und die IIIte Reihe des Lehrsatzes gibt.

Da nun in derselben ihr $U = \frac{Y-1}{Y+1}$, für jedes bejahte Y, allemal < 1 ist: so ist auch diese Reihe für jedes bejahte Y summatorisch convergent.

Zusätze.

§. 37 Da bei $b^x = Y$ die $X = \text{Log } Y$ des b-Systemes ist: so hat man die Ite Reihe des ersten, und die IIIte Reihe des zweiten Lehrsatzes auch

als $Y = 1 + \frac{\text{Log } Y}{a} + \frac{(\text{Log } Y)^2}{2.a^2} + \frac{(\text{Log } Y)^3}{2.3.a^3} + \frac{(\text{Log } Y)^4}{2.3.4.a^4} \ldots$

und $\text{Log } Y = 2.a\left\{\frac{Y-1}{Y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{Y-1}{Y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{Y-1}{Y+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{Y-1}{Y+1}\right)^7 + \ldots\right.$

Die Subtangente $a = 1$ genommen, also

auch $Y = 1 + \log Y + \frac{(\log Y)^2}{2} + \frac{(\log Y)^3}{2.3} + \frac{(\log Y)^4}{2.3.4} \ldots$

und $\log Y = 2\left\{\frac{Y-1}{Y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{Y-1}{Y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{Y-1}{Y+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{Y-1}{Y+1}\right)^7 + \ldots\right.$

§. 38. Aus diesen beiden, und einem endlichen Werthe sich nähernden, Ausdrücken des Log Y und log Y folgt der wichtige Satz, dafs $\text{Log } Y = a \log Y$ ist, den wir oben §. 22. schon auf andere Weise gefunden, und auf die log Briggii durch deren Subtangente $a = 0,43429 \ldots$ angewandt haben.

Aus diesem Satze folgt $a = \frac{\text{Log } Y}{\log Y}$, für Y=h genommen, also auch $a = \frac{\text{Log } h}{1}$; für Y=b genommen, auch $a = \frac{1}{\log b}$; h wie allemal, die Basis $= 2,71828 \ldots$ des natürlichen Systemes, und b die beliebige Basis irgend eines andern künstlichen Systemes bedeutend.

§. 39. Vermittelst dieser Folgerungen werden wir nunmehr kürzer als auf einem andern Wege die

summatorische Convergenz der Ite Reihe des ersten Lehrsatzes §. 32.

$$Y = 1 + \frac{\text{Log } Y}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{Log } Y}{a}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{\text{Log } Y}{a}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{\text{Log } Y}{a}\right)^4 + \ldots$$

als völlig allgemein für jedes Y und für jedes logarithmische System erweisen können; obgleich z.B. sogleich für das Briggische System, die Subtangente $a = \log 2,71828.. = 0,43439$ kleiner als 1 ist, und daher diese Reihe für alle solche Y, welche um ein Beträchtliches gröfser als $2,718\ldots$ sind, in mehren ihrer ersten Glieder sich divergent ergeben mufs.

Aber mag es überhaupt auch für andere Systeme mit noch kleineren Subtangenten, solcher Glieder noch so viele geben, so mufs man doch auf irgend ein rtes Glied $\frac{(\text{Log } Y)^r}{2.3.4\ldots.r-1.r.a^r} < 1$ kommen, indem ja diese Behauptung erwiesen ist, sobald man sich überzeugt hat

dafs $\overset{r}{\Gamma}(2,3.4\ldots.r-1,r) > \frac{\text{Log } Y}{a}$ geworden seyn mufs; dieses aber bei irgend einem rten Gliede sich ergeben mufs, weil ja $\overset{r}{\Gamma}(2.3\ldots.r-1.r)$ von jedem Logarithmensysteme und jedem dadurch logarithmisirten Y unabhängig, mit gröfserem r, wie man sich leicht überzeugen kann, immerfort gröfser und gröfser werdend ist, $\frac{\text{Log } Y}{a}$ aber für jedes gegebne Y einer durch Y selbst nebst a, und daher auch b, bestimmbaren endlichen Gröfse sich nähernd ist.

Sobald nun ein rtes Glied $\left(\frac{\text{Log } Y}{\overset{r}{\Gamma}(2.3\ldots.r-1,r.)\,a}\right)^r < 1$ sich ergeben hat, so würde von da an (nach Vorerin. IV. §. 12. Lehrs. 2, I.)

die obige Reihe gliederconvergent und auch summirt einem endlichen Werthe sich immerfort nähernd seyn müssen, auch wenn die Zahl $\Upsilon^{r}(2.3\ldots r-1.r)$ unverändert bliebe, welche doch in der wirklichen obigen Reihe auch noch immerfort wachsend, also die Glieder zunehmend verkleinernd ist.

Da nun der Ertrag der Reihe bis zum rten Gliede hin für jedes endlich gegebne Y eine bestimmte endliche Gröfse seyn mufs: so ist es uns nunmehr gewifs, dafs der Ertrag der ganzen Reihe eine endliche, und durch gehörige Fortsetzung jenseits des rten Gliedes, ausgemacht näher und näher zu findende Reihe seyn mufs.

Für manche allgemeine Formulirung ist es etwas werth zu wissen, dafs auch schon die erste Reihe des Lehrsatzes, unter allen die einfachste, durch ihre Convergenz bei jedem endlichen bejahten Y einem bestimmten endlichen Werthe sich nähernd ist; woran man bisher scheint gezweifelt zu haben.

Eilftes Capitel.

Bequeme Differenziirung logarithmischer Gröfsen.

§. 1. Nachdem wir, Cap. X. §. 31. den Satz $Y\frac{dX}{dY}=a$ gefunden haben, auch wenn $X=\mathrm{Log}Y$ eine beliebige Function von x oder auch noch mehren andern veränderlichen Gröfsen ist, folglich auch Y eine Function von eben denselben veränderlichen Gröfsen seyn kann, die fernerhin so genannte Subtangente a übrigens eine für jedes b-System, durch dessen Basis

b bestimmbare, von der Veränderlichkeit der X und Y unabhängige constante Gröfse ist: so wollen wir nunmehr wiederum durch die bequemeren kleineren Buchstaben $y\frac{dx}{dy} = a$ allerdings schreiben, dabei aber uns bewufst bleiben, dafs x und y nicht blos, wie im vorigen Capitel bis zu §. 31. hin, blofs veränderliche Zahlen, sondern auch die eben erwähnten beliebigen Functionen bedeuten kann.

Regeln des logarithmischen Differenziirens.

§. 2. Aus der Gleichung $y\frac{dx}{dy} = a$ kann

I) $dx = a\frac{dy}{y}$, das ist, $d\,\mathrm{Log}\,y = a.\frac{dy}{y}$, und

II) $dy = \frac{ydx}{a}$, das ist $dy = \frac{y.\,d\,\mathrm{Log}\,y}{a}$ gefolgert werden; kann demnach I) das Differential eines jeden Log y dadurch gefunden werden, dafs man des y Differential dy, durch y selbst dividirt, und durch des Systemes Subtangente multiplicirt, und kann

II) aus dem Differential des Logarithmen von y auf des y Differential dy dadurch geschlossen werden, dafs man das Differential des Logarithmen durch y selbst multiplicirt, und durch des Systemes Subtangente a dividirt.

§. 3. Zu mehrer Bequemlichkeit das natürliche System gewählt, hat man

1) $d\log y = \frac{dy}{y}$ und 2) $dy = y\,d\log y$;

wobei nicht nur das Multipliciren oder Dividiren mit der hieher gehörigen Subtangente $a = 1$, unangezeigt bleiben, sondern auch der Buchstabe a zur Andeutung anderer constanten Gröfsen wieder gebraucht werden kann, z. B. zur Andeutung eines beliebigen constanten Factors in den nächsten folgenden Beispielen.

Beispiele für die Regel 1.

§. 4. Beispiel 1. Sey $y = ax$ gegeben, so hat man

$d\log y = \frac{d.ax}{ax} = \frac{a\,dx}{ax} = \frac{dx}{x}$, dafs also der constante Factor a völlig weggefallen ist! Dieses Wegfallen erklärt sich auch durch folgende Schlüsse.

Da $\log y = \log ax = \log a + \log x$ seyn mufs, so mufs auch $d\log y = d\log a + d\log x = d\log x$

also auch $= \frac{dx}{x}$ seyn, nach Regel 1, dessen y jede veränderliche Gröfse also auch x soll seyn können.

Zusatz.

Auch würde $y = zx$ gegeben, ebenfalls

$^{x}d\log y = {}^{x}d(\log z + \log x) = {}^{x}d\log z + {}^{x}d\log x = 0 + {}^{x}d\log x$

also $= \frac{dx}{x}$ seyn müssen, wenn zwar z auch eine veränderliche, aber doch von x unabhängige Gröfse wäre. Denn wie sollte die Belegung eines x mit $\triangle x$ oder dx, auch für solche Gröfsen z, die vom x unabhängig sind, irgend eine Belegung $\triangle z$ oder dx bewirken können!

Eigentlich wird auch, dafs bei einem solchen vom x unabhängig veränderlichen z, $^{x}d\log x = \frac{dx}{x}$ seyn mufs, schon durch $d\log x = \frac{dx}{x}$ mit behauptet, weil ja der Factor a jede gegebne Gröfse bedeutet, also auch jede von den Gröfsen mit bedeuten kann, die man dem veränderlichen z für sich genommen, mag beigelegt wissen wollen.

Immerhin aber bleibt von einem gegebnen $y = ax$ ein gegebnes $y = zx$ für den Differentialcalcul über-

haupt genommen allerdings dadurch verschieden, dafs für ihn z, als eine veränderliche Gröfse, auch für sich mit dz belegt verlangt werden könnte; wie es im nächsten Beispiele vorausgesetzt wird.

Beisp. 2. Sey $y = xz$ gegeben, so hat man

$$d\log xz = \frac{d.xz}{xz} = \frac{z\,dx + x\,dz}{xz} = \frac{dx}{x} + \frac{dz}{z}.$$

Eben dieses erhält man auch durch folgende Schlüsse:

Es ist $d.\log xz = d(\log x + \log z) = d\log x + d\log z = \frac{dx}{x} + \frac{dz}{z}$.

Beisp. 3. Sey $y = xzu$ gegeben, so findet man

$$d\log y = \frac{dx}{x} + \frac{dz}{z} + \frac{du}{u}.$$

Beisp. 4. Für $y = \frac{Z}{N}$ hat man $\log y = \log Z - \log N$, also $d\log y = \frac{dZ}{Z} - \frac{dN}{N}$.

Beisp. 5. Folglich $d\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{2dx}{1-xx}$.

Beisp. 6. Sey $y = a^2 + x^2$, so hat man

$$d\log(a^2 + x^2) = \frac{2x\,dx}{a^2 + x^2}.$$

Sey auch überhaupt $y = A + X$, nämlich A ein constantes Glied der Function y, und X eine irgend beliebige Function von einer oder mehren veränderlichen Gröfsen: so hat man

$$d\log y = \frac{d(A+X}{A+X} = \frac{dX}{A+X};$$ dafs also im Differential des Logarithmen einer Function, ihr constantes Glied A immer noch vorhanden bleibt; ihr constanter Factor a dagegen (Beisp. 1.) verloren gieng. Gerade umgekehrt, wie bei den algebraischen Diffe-

rentialen Cap. IV. §. 20. §. 13. Mehr darüber werden wir in der Integralrechnung beizubringen haben.

Beisp. 7. Es ist $d\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$
$= \frac{dx+(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}x\,dx}{x+\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$.

Beisp. 8. auch $d\log(x-\sqrt{a^2+x^2})$
$= \frac{dx-(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}x\,dx}{x-\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{-dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$.

Beisp. 9. folglich $d\log\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{x-\sqrt{a^2+x^2}}$
$= d\log(x+\sqrt{a^2+x^2}) - d\log(x-\sqrt{a^2+x^2})$
$= \frac{2\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$.

Beisp. 10. Um sich die Auffindung des $d\log\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ durch Substitution zu erleichtern, setzt man $\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = u$. Da hieraus $u(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = x$ folgt: so hat man
$(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,du + \frac{1}{2}u(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\,dx = dx$;
also auch $(a^2+x^2)\,du + x\,u\,dx = (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$,
$(a^2+x^2)\,du = \left((a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{xx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\right)dx$,
$du = \frac{a^2}{(a^2+x^2)\sqrt{(a^2+x^2)}}$,
also $d\log\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\left(=\frac{du}{u}\right) = \frac{a^2}{x(a^2+x^2)}\,dx$.

Beisp. 11. Für $y = \log\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ wird das merkwürdige $dy = \frac{-dx}{x\sqrt{1-xx}}$ am leichtesten gefunden, wenn man zuvor den Zähler und den Nenner durch $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ multiplicirt, wodurch

man $y = \log \frac{x}{1 - \sqrt{1 - xx}} = \log x - \log(1 - \sqrt{1 - xx})$

erhält,

also $dy = \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{\sqrt{1-xx}} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{1-xx}} = \frac{dx}{x}$

$$- \frac{x\,dx}{\sqrt{1-xx} - 1 + xx} = \frac{-1 + xx + \sqrt{1-xx} - xx}{-1 + xx + \sqrt{1-xx}} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{1-xx}}{-\sqrt{1-xx} + 1} \cdot \frac{dx}{x\sqrt{1-xx}} = \frac{-dx}{x\sqrt{1-xx}}.$$

Anmerkung.

Ein merkwürdiges Differential! weil wir dadurch erfahren haben,

daſs $\int \frac{-dx}{x\sqrt{1-xx}} = \log \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ seyn muſs,

indem in der Integralrechnung überhaupt $\int dX$ den veränderlichen Theil X aller X-Functionen bedeutet, deren Differential sich $= dX$ ergeben könnte.

Und indem dieser logarithmische Ausdruck des X für alle $x > 1$ unmöglich wird: so kann für solche Werthe des x der trigonometrische Ausdruck

$\int \frac{-dx}{x\sqrt{xx-1}} = \text{arc cosec } x$ (§. 25; 6) benutzt werden,

welcher für alle $x > 1$ möglich bleibt.

In folgenden 3 Beispielen werden logarithmische und trigonometrische Differenziirungsregeln benutzt, deren Resultate ebenfalls mit mehren ähnlichen in der Integralrechnung nützlich sind.

Beisp. 12. $d \log \sin \varphi = \frac{d \sin \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\cos \varphi \,.\, d\varphi}{\sin \varphi}$

$$= \cot \varphi \,.\, d\varphi$$

Beisp. 13. $d \log \operatorname{tang} \varphi = \frac{d \operatorname{tang} \varphi}{\operatorname{tang} \varphi} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2 \operatorname{tang}\varphi}$

$= \frac{2\, d\varphi}{\sin 2\varphi}$

Beisp. 14. $d \log \sec \varphi = \frac{d \sec \varphi}{\sec \varphi} = \operatorname{tang} \varphi . d\varphi$

Beisp. 15. $y = \log \log x$ zuvörderst durch Substitution als $y = \log u$ gedacht, gibt $dy = \frac{du}{u}$. Da nun zufolge der Substitution $u = \log x$ bedeutet, folglich $du = \frac{dx}{x}$ seyn mufs; so hat man

$$dy = d \log x = \frac{dx}{x \log x}$$

Beisp. 16. Sey $y = (\log x)^n$, so hat man $\log y = n \log \log x$, also das vorige Beispiel benutzt, $\frac{dy}{y} = n \frac{dx}{x \log x}$; vorausgesetzt, dafs nicht auch n veränderlich sey, wodurch die Potenz $(\log x)^n$ schon zu den Exponentialgröfsen des folgenden Capitels gehören würde.

Unter der Bedingung eines constanten n also nun $d(\log x)^n = n \frac{\log x^n dx}{x \log x} = \frac{n \log x^{n-1} dx}{x} = n \log x^{n-1} . d \log x$, welcher letzte Ausdruck sich allerdings auch unmittelbar der algebraischen Differenziirungsregel $d. X^n = n X^{n-1} dX$ gemäfs ergeben mufs.

Beisp. 17. Sey ausser n auch m constant, so hat man

$d. (\log x^n)^m = m (\log x^n)^{m-1} d \log x^n = m (\log x^n)^{m-1} n\, d \log x$

auch $= n m (\log x^n)^{m-1} \frac{dx}{x}$.

Beispiel für die Regel 2. (§. 3.)

§. 5. Diese zweite Regel, $dy = y\, d \log y$, lehrt das Differential einer Function y dadurch finden, dafs

man mit ihr selbst das Differential ihres natürlichen Logarithmen multiplicirt.

Daher man z. B. aus $d \log \sec \varphi = \tang \varphi . d\varphi$ (Beisp. 14. §. 4.)
auf $d \sec \varphi = \sec \varphi . \tang \varphi \, d\varphi$

$$= \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} d\varphi = \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{\cos \varphi \cos \varphi}$$ schliessen kann; welches allerdings aus X §. 11. uns schon bekannt ist.

Man sieht hieraus, dafs beide Regeln einander zur Probe dienen können. Auch ist es bisweilen der Fall, dafs man das Differential des Logarithmen leichter, als das Differential der Function anzugeben weifs, wie es namentlich das gleichfolgende XIIte Capitel vor Augen legen wird.

§. 6. *Die höheren Differentiale*

für solche logarithmische Functionen aufzufinden, deren erstes Differential wir hier finden gelehrt haben, hat nur die Anwendung der algebraischen Differenziirungsregeln nöthig, falls der erste Differentialquotient blofs eine algebraische Operation fordert.

Z. B. da wir für $x = \text{Log} y$, das Differential $dx = d \, \text{Log} y = d . a \log y = a \, d \log y = a \frac{dy}{y}$, also y als Function des x betrachtet den ersten Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{a}$; oder x als Function von y betrachtet, den ersten Differentialquotienten $\frac{dx}{dy} = \frac{a}{y}$ haben: so werden wir im ersten Falle

aus $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{a}$ auf $\frac{ddy}{dx} = \frac{1}{a} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y}{a^2}$

also auf $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{a^2}\frac{dy}{dx} = \frac{y}{a^3}$

folglich $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{a^3}\frac{dy}{dx} = \frac{y}{a^4}$, u.s.w. zu schliefsen haben;

im zweiten Falle

aus $\frac{dx}{dy} = \frac{a}{y} = a.y^{-1}$ $\left(= \frac{a}{y}\right)$

auf $\frac{ddx}{dydy} = -1.ay^{-2}$ $\left(= -\frac{1.a}{y^2}\right)$

auf $\frac{d^3x}{dy^3} = +2.ay^{-3}$ $\left(= +\frac{1.2.a}{y^3}\right)$

auf $\frac{d^4x}{dy^4} = -2.3.ay^{-4}$ $\left(= -\frac{1.2.3.a}{y^4}\right)$, u. s. w.

§. 7. Sollte ein Differentialquotient noch trigonometrische Functionen enthalten, so wird man ihn nach den Lehren des XIten Capitels ferner zu differenziiren wissen; oder sollten in ihm selbst noch logarithmische Functionen vorkommen, so wird er ihnen gemäfs nach den schon bekannten Lehren, oder doch, falls es andere exponentiale Gröfsen sind, vermittelst des folgenden Capitels fernerhin differenziirt werden können.

Zwölftes Capitel.

Differenziirung der Exponential-Functionen.

Erklärung.

§. 1. Eine Exponentialfunction heifst jede Potenz, deren Exponent als eine veränderliche Gröfse behandelt wird, ihre Stammgröfse mag selbst auch veränderlich seyn, wie x im x^z, oder constant seyn, wie b im b^z.

Der Exponent kann selbst schon eine Exponentialfunction seyn, wie in x^{y^z}. Anstatt dergleichen Ausdrücke Exponentio-Exponentialgröfsen zu nennen, können sie Exponentiale der zweiten Höhe genannt werden, da denn z. B. $x^{x^{x^x}}$ ein Exponentiale der dritten Höhe ist; u. s. w.

§. 2. Der 2ten logarithmischen Differenziirungsregel $dX = X.d\,lX$ gemäfs (XI. §. 3.), dessen X jede veränderliche Gröfse, also auch $= x^z$ seyn kann, hat man zuvörderst

$$d.x^z = x^z.\ d\,lx^z.$$

Da nun $d\,lx^{z} \overset{(X.\ \S\ 20)}{=\!=} d.z\,lx \overset{(VII.\ \S.\ 19)}{=\!=} lx.dz + z.d\,lx$ ist, so mufs $d.x^z = x^z.\,(lx.dz + z\,d\,lx)$ seyn ..... (1.

Hierin $d\,lx = \frac{dx}{x}$ geschrieben (XI. §. 3.) hat man allerdings auch $d.x^z = x^z\,[x.\ dz + x^{z-1}\,z\,dx$ ... (2.

So lange man aber, auch der Kürze wegen, den Logarithmen lx statt seines Reihenausdruckes beibehalten kann, wird man auch am liebsten dessen Differential $d\,lx$ in dem Calcul behalten, daher man zuvörderst den

ersten Ausdruck $d.x^z = x^z\,(dz.lz + z\,d\,lx)$ als Fundamentalregel für das Differenziiren der Exponentialfunctionen zu gebrauchen pflegt.

§. 3. Dieser Regel gemäfs hat man für $x = b$ sogleich $d.b^z = b^z.\,dz.\,lb$ ..... (3. Also auch $d.b^{z-c} = b^{z-c}.dz.\,lb$, wenn c eine constante, vom z unabhängige Gröfse bedeutet.

§. 4. Da z hier jede veränderliche Gröfse, also auch $= mz$, sowohl mit veränderlichem als mit constantem m seyn kann: so hat man

auch $d.b^{mz} = b^{mz}\, d.mz.\, lb$, eben so allgemein; ... (4.
und $d.b^{mz} = mb^{mz}\, dz.\, lb$, wenn m constant ist, ... (5.
(indem bei constantem Factor m auch $d.mz = mdz$ ist. Bei veränderlichem m würde $d.mz = zdm + mdz$ seyn).

§. 5. Für $b = h = 2,71828$, diese Basis der natürlichen Logarithmen, ist $lb = lh = 1$
also $d.h^{mz} = h^{mz}.\, d.mz$, für jedes m, ... (6.
und $d.h^{mz} = m\, h^{mz}.\, dz$ für ein constantes m, ... (7.
Folglich $d.h^z = h^z\, dz$, für $m = 1$, ... (8.

§. 6. Dieses $d.h^z = h^z\, dz$ gibt den ersten Differentialquotienten
$\frac{d.h^z}{dz} = h^z$; also den zweiten $\frac{d^2.h^z}{dz^2} = \frac{d.h^z}{dz} = h^z$; auch den
dritten $\frac{d^3 h^z}{dz^3} = h^z$; und so überhaupt $\frac{d^r h^z}{dz^r} = h^z$; daſs
also diese Differentialquotienten in ihren steigenden Graden immerfort einerlei Werth behalten.

§. 7. Um doch ein Beispiel vom differenziiren einer Exponentiale der zweiten Höhe zu haben, sey
$U = x^{y^t}$ gegeben. Um dessen dU zu finden, setze man
$y^t = z$, so hat man
zuvörderst $dU = d.x^z = x^z (lx.\, dz + z.\, d\,lx)$. (§. 2.)
Eben so $dz = y^t (ly.\, dt + t.\, d\,ly)$;
also $dU = x^{y^t}.y^t\, (lx.\, ly.\, dt + t\,lx.\, d\,ly + d\,lx)$;
auch $= x^{y^t}.\, y^t\, (lx.\, ly.\, dt + t\,lx.\, \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x})$.

§. 8. Da jedes $x^z = h^w$ seyn muſs, wenn $l.x^z = l.h^w$, also auch, wenn $z\,lx = w\,lh = w$ ist: so hat man
jedes $x^z = h^{z\,lx}$ und $b^z = h^{z\,lb}$;
daher man in den obigen Formeln jedes x^z oder b^z durch Potenzen des h ausdrücken kann; für die Berechnung dieser Gröſsen sehr bequem, weil man viele

Potenzen des h in Tafeln berechnet vorfindet, und wo diese nicht genau genug ausreichen, die gewöhnlichen Tafeln der natürlichen Logarithmen benutzen kann.

Ich habe diese Bemerkung hier schon beibringen, nicht bis zur Integralrechnung versparen wollen, weil man ja nicht selten auch schon Differentialquotienten zu berechnen hat.

§. 9. Wenn man z. B. für einzele gegebne Werthe des b und m, auch z, den Differentialquotienten $\frac{d.b^{mz}}{dz} = mb^{mz}\,lb$ (nach §. 5, also bei constantem m) berechnet wissen will: so bedenkt man, dafs dieser Quotient auch $= h^{mzlb}.mlb$ seyn mufs.

Sey nun $b = 15$ gegeben, so ist $lb = 2,708050$, und $m = 2$ gegeben, so ist $mlb = 5,416100$.

Für den Fall $z = 3$ also $mzlb = 16,248300$. Nun findet man in den Tafeln, $h^{10} = 22026,47$, und durch die Tafel der Logarithmen, $h^{6,24804} = 517$.

Will man damit zufrieden seyn, $h^{16,24804}$ statt $h^{16,248300}$ zu gebrauchen: so hat man für die gegebnen Werthe der constanten Zahlen b und m, und für des veränderlichen z einzelen Werthfall $= 3$, dafs $\frac{d.b^{mz}}{dz} = h^{mzlb}.mlb = (22026,47.517.)5,4161$ seyn mufs, und wird dieses Product am bequemsten vermittelst der Briggischen Tafeln finden.

§. 10. Auch kann man das genauere $h^{16,2483}$ von Anfang an durch Briggische Logarithmentafeln finden. Denn diese gesuchte Gröfse $= H$ genannt, hat man $log\ H = 16,2483.\ log\ h = 16,2483.1$ folglich $log\ Brigg\ H = 16,2483.M = 16,2483.0,43429\ldots$ (X. §, 25).

Da nun 10.M = 4,342944
6. " = 2,605766
0,2. " = 0,086859
0,04. " = 0,017372
0,008. " = 0,003474, aus den Tafeln zu
0,0003. " = 0,000130, nehmen ist, so
hat man log Brigg H = 7,056545; hiezu wegen
m ∫b = 5,4161
noch log Brigg 5,4161 = 0,733686 addirt, gibt
log Brigg (H.5,4161) = 7,780231, also den gesuchten Werth des Differentialquotienten = 61693000.

§. 11. Da man jedes x^z als $= h^{z\int x}$ ansetzen kann (§. 8.), folglich auch jedes $d.x^z = d.h^{z\int x}$ seyn muſs: so ist es einleuchtend, daſs man, zuvörderst nur das $d.b^z = b^z.dz.\int b$ (§. 6.) für jedes veränderliche z und jedes constante b richtig zu erweisen nöthig hätte, um aus dem dadurch mit erwiesenen $d.h^{z\int x} = h^{z\int x}.d.z\int x.1$
$= h^{z\int x}.(\int x.dz + zd\int x)$
auch $d.x^z = x^z.(\int x.dz + zd\int x)$ ganz allgemein erwiesen zu sehen, welches nun die obige Fundamentalregel (§. 2.) ist.

Indessen habe ich für besser gehalten, die obigen 8 Formeln in dortiger Folge aufzuführen, wegen ihres Gebrauches in der Integralrechnung, wo wir dann auch noch ihren Ausdruck in Reihen werden hinzufügen müssen.

§. 12. Obgleich nun diese Formeln in §. 2 bis 5. aus der 2ten Differenziirungsregel $dX = Xd\int X$ kurz und bündig geschlossen sind; auch wir aus $y = x^z$ auf die Logarithme $\int y = \int x^z = z.\int x$, und deren Differential, $\frac{dy}{y} = \int x.dz + z.d\int x$ geschlossen, die Fundamentalregel $d.x^z = x^z.(\int x.dz + z.d\int x)$ noch etwas kürzer hiermit gefunden hätten: so wird es doch in vieler Hinsicht nützlich seyn, die Fundamentalregel

auch durch unmittelbare Belegung der Function x^z gefunden zu wissen.

§. 13. Nehmen wir hiebei zuvörderst die Function $y = b^z$, also die Exponentiale mit constanter Stammgröfse in Angriff, so haben wir ihre belegte Gröfse $y^z = b^{z+dz} = b^z . b^{dz} = y . b^{dz}$,
also $dy = y . b^{dz} - y = y(b^{dz} - 1)$.

Da wir nun für den Differentialquotienten $\frac{dy}{dz} = y \frac{b^{dz} - 1}{dz} = y . \frac{0}{0}$ schon in der Logarithmik (XI. §. 2.) es dargethan haben, dafs er $= \frac{y}{\beta}$ ist, wenn β die Subtangente des b-Systemes bedeutet, in welchem b die Basis und $z = \text{Log}\, y$ ist: so wissen wir nun auch, dafs $dy = y . \frac{dz}{\beta} = y . \frac{d\,\text{Log}\, y}{\beta}$ seyn mufs, das ist, $d.b^z = b^z . \frac{d\text{Log}b^z}{\beta} = b^z . \frac{d.z.\,\text{Log}\, b}{\beta} = b^z . \frac{\text{Log}b.dz}{\beta}$.

Für natürliche Logarithmen also $d.b^z = b^z . \log b . dz$; Allerdings! Indessen mögte ich doch in dieser Hinsicht auch auf folgende Weise schliefsen.

Da wir für jedes y, welches $= b^x = b^{\text{Log}\, y}$ einen möglichen Logarithmen hat, auch den natürlichen Logarithmen anzugeben wissen, also dadurch wissen, dafs y auch $= h^r = h^{\log y}$ seyn mufs; so mufs sich durch die vorigen Schlüsse auch $d.b^z = b^z . \log b . dz$ ergeben.

§. 14. Sey nun ferner $y = x^z$, eine Exponentiale mit auch veränderlicher Stammgröfse x, so mufs ihre belegte Gröfse
$y^z = (x + dx)^{z+dz} = (x + dx)^z . (x + dx)^{dz}$ seyn.

Da nun die Binomialreihe (Vorerin. V. §. 1.)
$(x + dx)^z = x^z + z . x^{z-1} dx + S . dx^2$
und $(x + dx)^{dz} = x^{dz} + dz . x^{dz-1} dx + T . dx^2$ gibt,

wenn wir durch $S.dx^2$ und $T.dx^2$ die sämmtlichen rückständigen Glieder der ersten und zweiten Reihe andeuten, welche dx^2 zum Factor haben, indem ja dieser Factor auch in ihrem dx^3, und dx^4, u.s.w. vorhanden ist.

In dem folgenden Producte dieser beiden Reihen, diejenigen Glieder, welche dx^2 zum Factor haben würden, gänzlich weggelassen, weil sie, nachdem man sie durch dx dividirt hätte, wegen ihres ihnen übrigen Factors dx, mit $dx = o$ geworden, sich sämmtlich vernullen müfsten, haben wir

$y^z = x^z x^{dz} + zx^{z-1} x^{dz} dx + x^z . dz . x^{dz-1} . dx$, also $y^z - y = x^z x^{dz} - x^z + zx^{z-1} . x^{dz} dx + x^z dz . x^{dz-1} dx$

also $\frac{dy}{dz} = x^z . \frac{x^{dz} - 1}{dz} + zx^{z-1} . x^0 . \frac{dx}{dz} + x^{z-1} dx$ für $dz = o$ geworden.

§. 15. Soll nun $\frac{dx}{dz}$ einen bestimmten Werth erhalten, so mufs auch $dx = o$ geworden seyn, und somit auch das dritte Glied sich vernullt haben; daher uns nur $\frac{d.x^z}{dz} = x^z . \frac{x^{dz} - 1}{dz} + zx^{z-1} \frac{dx}{dz}$ übrig bleibt, und die Bestimmbarkeit des $\frac{d.x^z}{dz}$ lediglich von diesen beiden übrigen Gliedern noch abhängig seyn kann; auch wenn x und z zwei von einander ganz unabhängige veränderliche Gröfsen wären.

Obgleich in diesem Falle, namentlich für den Quotienten $\frac{dx}{dz}$ allein genommen, eher nichts bestimmt werden könnte, als bis die Functionirung zwischen x und z gegeben wäre: so ist doch gewifs, dafs das zweite Glied im Ganzen genommen, da es $= x^z . \frac{dx}{x} . \frac{z}{dz}$ ist, auch $= x^z . z \frac{dx}{dz}$ seyn mufs; daher

wir nun $\frac{d.x^z}{dz} = x^z.\left(\frac{x^{dz}-1}{dz} + z\frac{d[x]}{dz}\right)$ haben.

§. 16. Folglich auch $\frac{d.x^z}{dz} = x^z.\left(\frac{1}{\xi} + z\frac{d[x]}{dz}\right)$, durch ξ die veränderliche Subtangente des veränderlichen x-Systemes angedeutet; indem wir aus der Logarithmik wissen, daſs $\frac{b^{dz}-1}{dz} = \frac{1}{\beta}$ für jedes constante b-System seyn würde, in welchem $z = \text{Log}\, y$ für $y = b^z$ ist, und β die constante Subtangente des b-Systemes bedeutet. Demnach haben wir nun $\frac{d.x^z}{dz} = x^z.\left(\frac{1}{\xi} + z.\frac{d[x]}{dz}\right)$.

§. 17. So wie nun $\beta.[\log b = \text{Log}\, b = 1$ ist, muſs auch $\xi.[\log x = \text{LOG}\, x = 1$ seyn, wenn LOG x den im veränderlichen x-Systeme der Basis x jedesmal zugehörigen Logarithmen bedeutet. Da nun aus der letzten Gleichung folgt, daſs $\frac{1}{\xi} = \frac{\text{LOG}\, x}{\xi} = [\log x$ ist; so haben wir

nunmehr $d.x^z = x^z.([\log x.dz + z.d[x])$

(Bei dieser Herleitung des $d.x^z$ seit §. 14. sind wiederum Sätze bekannt geworden, welche durch ihre Folgen in verwickelten Functionen auch einem geübten Calculator viel zu schaffen machen können, wenn er sie einzeln zu beachten versäumt hat.)

§. 18. In dem Exponentialdifferentiale $d.x^z = x^z(dz.[x + z d[x])$ statt des veränderlichen z ein constantes n gesetzt, hat man auch $dz = dn = o$ zu setzen, und erhält dadurch

$d.x^n = x^n.(o.[x + n d[x]) = x^n.n\frac{dx}{x} = nx^{n-1}\,dx$

vollkommen richtig, und durch richtige Schlüsse, als das Differential der algebraischen Function x^n.

§. 19. Wenn man nun aber aus dem allgemeinen algebraischen Differential schliefst, dafs es für den einzelen Fall $n = o$

ein $d.x^o = o.x^{o-1}\,dx = \frac{o}{x}.dx = o.dx$ geben mufs,

und aus dem allgemeinen Exponentialdifferentiale schliefst, dafs es für den einzelen Werth des z, für $z = o$

ein $d.x^o = x^o$ $(dz.\lfloor x + o.d\lfloor x)$ geben mufs: so wäre es sehr übereilt, es anstöfsig zu finden, dafs man für $d.x^o$ nicht einerlei Werth erhalten habe!

§. 20. Schon von vorne her ist es einzusehen, dafs es für $d.x^o$, und eben so wie für $d.x^1$, für $d.x^2$, u. s. w. ein allgemeines Differential nicht geben kann; sondern man z. B. für $d.x^2$ unterscheiden mufs, ob der Exponent 2 ein einzeler Werthfall des constanten Exponenten n im algebraischen x^n seyn soll, oder ob es einen einzelen Werthfall des veränderlichen Exponenten z im Exponentialen x^z ausmachen solle!

Im ersten Falle kann die gewöhnliche Behauptung, dafs $d.x^2 = 2xdx$ sey, gebilligt werden, weil man in der That für ein gegebnes x^2 dessen Differential $d.x^2 = 2xdx$ unmittelbar finden könnte, ohne die allgemeine Form $d.x^n = nx^{n-1}dx$ zu Rathe zu ziehen.

§. 21. Im zweiten Falle aber sollte die Antwort eigentlich seyn, dafs man dieses $d.x^2$ nur als ein

$$d.x^z = x^z.(\lfloor x.dz + z.d\lfloor x)$$

auf den einzelen Werthfall $z = 2$ eingeschränkt finden könne.

$(z = 2)$

$d.x^z$ geschrieben, soll uns bedeuten, dafs man die unter $(z = 2)$ geschriebene Function des z, also das Differential $d.x^z$, nicht etwa blofs x^z, auf den einzelen Werthfall $z = 2$ eingeschränkt verlangt: so haben wir

$$(z = 2)$$
$$d.x^z = x^2 (lx.dz + 2dlx).$$

Da nun hier, und überdies wo nicht ausdrücklich von einem noch werdenden Differential gesprochen wird, allemal ein genaues Differential zu verstehen ist, so wissen wir auch, dafs jedes seiner Urdifferentiale, hier also dz und dx völlig $= o$ geworden seyn mufs. Auch sind wir, nach unserm obigen Vortrage, ganz allgemein und unwiderruflich davon überzeugt, dafs eben daher auch jedes durch die Urdifferentiale bewirkte Functionsdifferential, hier also $d.x^z$ ebenfalls völlig $= o$ geworden seyn mufs.

Hat man es mit einem X, mit einer Function einer einzigen Variabeln x zu thun, so ist das Functionsdifferential dX ein $= p.dx = p.o$; und wenn man nach der Gröfse des Differentials dX fragt, so will man die Gröfse oder den Werth seines Coefficienten p wissen, den man am reinsten und sichersten als den Differentialquotienten $p = \frac{dX}{dx}\left(= \frac{o}{o}\right)$ aufzufinden hat.

§. 22. Das hier behandelte x^z aber ist eine Function von zwei Variabeln x und z, daher man sowohl nach dem einen Differentialquotienten $\frac{d.x}{dz} = x^z.\left(lx. + z\frac{dlx}{dx}\right)$, als auch nach dem andern $\frac{d.x^z}{dx} = x^z.\left(lx.\frac{dz}{dx} + z\frac{dlx}{dx}\right)$ kann zu fragen haben.

Da wir wissen, dafs $dlx = \frac{dx}{x}$ ist, so haben wir auch $\frac{d.x^z}{dz} = x^z\left(lx + \frac{z}{x}.\frac{dx}{dz}\right)$
und $\frac{d.x^z}{dx} = x^z\left(lx.\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x}\right)$.

Hiemit liegt es nun vor Augen, dafs die Gröfse des ersten Quotienten, wegen des $\frac{dx}{dz} = \frac{0}{0}$ in seinem zweiten Gliede, und der zweite Quotient, wegen des $\frac{dz}{dx} = \frac{0}{0}$ in seinem ersten Gliede, im Allgemeinen unbestimmt bleiben mufs, so lange nicht eine Functionirung des z durch x, oder des x durch z gegeben, und dadurch der Werth dieses $\frac{0}{0}$ bestimmt ist.

§. 23. Nur zwei Fälle machen hierin eine sehr merkwürdige theilweise Ausnahme, wie ich in der Kürze es nennen will.

Erstens, wenn wir $x = 1$ setzen, so haben wir $\frac{d.x^z}{dx} = 1^z\left(0.\frac{dz}{dx} + \frac{z}{1}\right) = 1.(0+z) = z$, vom $\frac{dz}{dx}$ unabhängig geworden, $(x = 1)$

zweitens, wenn wir $z = 0$ setzen, so erhalten wir $\frac{d.x^z}{dz} = x^0\left(lx + \frac{0}{x}.\frac{dx}{dz}\right) = 1.(lx + 0) = lx$ $(z = 0)$

Dafs das exponentiale $\frac{d.x^z}{dz}$ auch für $z = 0$ gültig seyn mufs, ist uns durch das Gesetz der Stetigkeit erweislich. Denn da das Differential $d.x^z$ für jeden Werth des veränderlichen z gefunden ist; so mufs es auch für $z = \frac{1}{m}$ bei noch so grofsem m, also für $z = \frac{1}{\infty}$, folglich auch für $z = \frac{1}{\infty} = 0$ gelten.

§. 24. Allerdings liefse sich nun noch darthun, dafs die beiden Sätze in §. 23. eigentlich nicht Ausnahmen von der allgemeinen Behauptung in §. 22,

sondern dieser Behauptung selbst sehr gemäfs sind. Indessen mufs ich oft dergleichen, gleichsam philosophirende Erörterungen unterdrücken.

Der zweite Satz ist für die Integralrechnung sehr wichtig, und wird dort auf noch andere Weise dargestellt werden. Hier schien es mir nützlich, die obigen Folgerungen beizubringen, obgleich man meines Wissens noch in keinem Lehrbuche darauf gekommen ist.

Dreizehntes Capitel.

Vergleichung zwischen logarithmischen und trigonometrischen Differentialen, und anderer Gebrauch unmöglicher Factoren.

§. 1. Solche Vergleichungen sind für die Integralrechnung ein wesentliches Bedürfnifs, und pflegen gerade den hoffnungsvollsten Anfängern, welche mehr durch deutliche Vorstellungen, als durch ihr Formeln-Gedächtnifs fortzuschliefsen suchen, am schwierigsten zu fallen.

Diesen wird es erwünscht seyn, hier schon eine der merkwürdigsten von solchen Vergleichungen zur völligen Deutlichkeit sich gebracht zu haben, und an ihr dereinst gleichsam eine alte Bekanntin anzutreffen. Wir wählen dazu das trigonometrische Differential $d\varphi = \frac{d \tang \varphi}{1 + \tang \varphi^2}$, mit welchem $dX = \frac{dx}{1+xx}$ verglichen, sogleich vor Augen legt, dafs dieses Differential dX als das Differential eines Kreisbogens φ, welcher der $\tang \varphi = x$ zugehört, kann betrachtet werden.

§. 2. Da es nun aus der trigonometrischen Tangentenscala bekannt ist, dafs es für jede bejahte Tangente, von $=0$ an bis zum $+\infty$ hin, schon in dem ersten bejahten Quadranten, und für jede verneinte Tangente von $=0$ an bis zum $=-\infty$ hin, schon in dem ersten verneinten Quadranten einen Bogen φ, in jenem ein $+\varphi$, in diesem ein $-\varphi$ gibt, welches der Tangente zugehört: so kann nun in dem vorgegebenen Differential

$$dX = \frac{dx}{1+xx} \text{ oder } = \frac{-dx}{1+xx}$$

für jedes bejahte x auch ein $d\varphi = dX$, also $\varphi = X$, für jedes verneinte x auch ein $-d\varphi = dX$, also $-\varphi = X$ behauptet, *) und für jedem einzelen Werth des $x = \text{tang}\,\varphi$ aus den trigonometrischen Tafeln abgenommen werden.

§. 3. Eben deshalb, weil hier etwa durch zu grofse oder zu kleine bejahte oder verneinte x irgend eine algebraische Unmöglichkeit für jene trigonometrische Formel nicht entstehen kann, schien auch gerade diese mir vorzüglich geschickt zu seyn, um uns auf das einfachste darzulegen, dafs wir die bisweilen so genannten unmöglichen Tangenten $\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}$, in der That nur als ein Product aus dem unmöglichen Factor $\sqrt{-1}$ und der allemal möglichen Tangente des Bogens φ zu benutzen haben, um gewisse Formeln ungleich kürzer, als es ohne Vermittelung des $\sqrt{-1}$ geschehen könnte, zu gewinnen.

Um die versprochene Vergleichung deutlich darzustellen, werden wir uns zuvörderst das dazu gehö-

*) Da ich ausdrücklich bedungen habe, hier nur Bogen des ersten Quadranten in Anschlag zu bringen, so würde es hier seine Richtigkeit haben, dafs der X kein anderes constantes Glied als o zukommen könne. Auch von manchen geübten Lehrern wird dieses zu allgemein behauptet.

rige logarithmische Differential, durch folgende Schlüsse verschaffen müssen.

§. 4. Da $1-xx$, als $=(1+x)(1-x)$, in zwei solche Factoren sich zerlegen läfst, deren Summe, $1+x+1-x=2$, kein x enthält: so hat man

$$\frac{dx}{1-xx} = \frac{dx}{(1+x)(1-x)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{(1+x).(1-x)} + \frac{1+x}{(1+x)(1-x)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{1+x} - \frac{-dx}{1-x}\right), \text{ also}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(d\log(1+x) - d\log(1-x)\Big). \text{ (XI. §. 3.)}$$

$$= \frac{1}{2}d\Big(\log(1+x) - \log(1-x)\Big) = \frac{1}{2}d\log\frac{1+x}{1-x};$$

und so wissen wir von jedem $d\mathfrak{X} = \frac{dx}{1-xx}$, dafs es ein $d\mathfrak{X} = \frac{1}{2}d\log\frac{1+x}{1-x}$ seyn, und somit auch $\mathfrak{X} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ seyn mufs. *)

§. 5. Indem wir nun vor Augen haben, dafs jedes $dX = \frac{dx}{1+xx} = \frac{d\,\mathrm{tang}\,\varphi}{1+(\mathrm{tang}\,\varphi)^2}$, ein trigonometrisches, und dagegen jedes $d\mathfrak{X} = \frac{dx}{1-xx} = \frac{1}{2}d\log\frac{1+x}{1-x}$, ein logarithmisches Differential ist: so tritt die Frage ein, ob nicht das trigonometrische dX als ein logarithmisches Differential, oder das logarithmische $d\mathfrak{X}$ als ein trigonometrisches könne dargestellt werden; und hierauf wird

*) Folglich (X. §. 36) für alle $x > 1$ ein mögliches $\mathfrak{X}$ nicht mehr statt findet.

sich die merkwürdige Antwort ergeben, dafs beides für mögliche x durchaus nicht, sondern nur durch Einführung unmöglicher Werthe des x Statt finden kann.

Denn sollte die Zahl x im logarithmischen $d\mathfrak{X}$ eine solche Zahl $\mathfrak{x}$ seyn, dafs ihr $-\mathfrak{x}\mathfrak{x}$ zugleich das $+xx$ im trigonometrischen Differential dX ausmache; so müfste $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = -xx$, also $\mathfrak{x} = \sqrt{-xx} = \sqrt{xx-1} = x\sqrt{-1}$, also $\mathfrak{x}$ eine unmögliche Zahl seyn, wenn x im trigonometrischen dX eine mögliche $\text{tang}\,\varphi$ seyn soll.

Oder sollte die Zahl $x = \text{tang}\,\varphi$ im trigonometrischen dX eine solche Tangente $\mathfrak{x}$ seyn, dafs $+\mathfrak{x}\mathfrak{x}$ im trigonometrischen Differential zugleich ein $-xx$ im logarithmischen $d\mathfrak{X}$ abgeben könne: so würde wiederum $\mathfrak{x} = x\sqrt{-1} = \text{tang}\,\varphi.\sqrt{-1}$ seyn, also, wenn x eine mögliche Tangente bedeutet, $\mathfrak{x}$ eine unmögliche angeben müssen.

In diesem Falle hat man nun das trigonometrische $dX =$

$$\frac{d.x\sqrt{-1}}{1+(x\sqrt{-1})^2} = \frac{d\,\text{tang}\,\varphi.\sqrt{-1}}{1+(\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1})^2} = d\,\text{arc tang}\,x\sqrt{-1},$$

und das logarithmische $d\mathfrak{X} =$

$$\frac{d.x\sqrt{-1}}{1-(x\sqrt{-1})^2} = \frac{d\,\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-(\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1})^2} =$$

$$\frac{1}{2}\,d\log\frac{1+\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}}.$$

§. 6. Das trigonometrische $dX = d\,\text{arc tang}\,\varphi\sqrt{-1}$ mufs schlechterdings ein unmögliches Bogendifferential seyn, weil einer uemöglichen Tangente kein möglicher Bogen zugehören kann; und dafs das logarithmische $d\mathfrak{X} = \frac{1}{2}\,d\log\frac{1+\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}}$ ebenfalls ein unmögliches Differential angibt, ist sogleich dadurch

einzusehen, dafs ja $d\mathfrak{X} = \frac{d.x\sqrt{-1}}{1-(x\sqrt{-1})^2}$

auch $= \frac{\sqrt{-1}.dx}{1+xx} = \sqrt{-1}.\,d\,\text{arc tang}\,\varphi$ ist.

§. 7. Diese beiden unmöglichen Werthe des $d\mathfrak{X}$ geben uns nun

$$\sqrt{-1}.\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\,d\log\frac{1+\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}}$$

folglich $d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,d\log\frac{1+\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}}$;

welches nun die sehr bekannte viel gebrauchte Formel ist, in welcher man vermittelst so genannter unmöglicher Tangenten ein mögliches trigonometrisches Differential auch einer logarithmischen Differentialform unterworfen hat. Wenn wir nun für dieselbe abermals eine andere und solche Umformung anzugeben wissen, durch welche wir des von uns zu Hülfe gerufenen $\sqrt{-1}$ wiederum völlig entledigt werden: so können wir diesem Verfahren eine brauchbare Form für das mögliche Differential $dX = \frac{dx}{1+xx}$ zu verdanken haben, deren eigenthümliche Nützlichkeit allerdings erst in der Integralrechnung von uns gewürdigt werden kann, indem wir dort erst einsehen werden, dafs wir ohne diese heroistische Hülfe des unmöglichen Factors ungleich mühsamere Wege einschlagen müfsten, um aus dem gegebenen $dX = \frac{dx}{1+xx}$ auf diejenige Function X zu schliefsen, welche den veränderlichen Theil aller der Functionen $X + C$ ausmacht, deren Differential $= \frac{dx}{1+xx} + o$ seyn könnte.

§. 8. Solch eine abermalige Umformung für den logarithmischen Ausdruck unsers Bogendifferentiales

$d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, d \log \frac{1+\tang\varphi.\sqrt{-1}}{1-\tang\varphi.\sqrt{-1}}$, wird uns nun durch die in XI, §. 36. erwiesene Reihe

$\log \frac{1+U}{1-U} = 2.\left\{U + \frac{1}{3}U^3 + \frac{1}{5}U^5 + \frac{1}{7}U^7 + \ldots\right\}$ dargeboten, welche, ihr $U = \tang\varphi.\sqrt{-1}$ gesetzt, uns sogleich

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\, d \log \frac{1+\tang\varphi\sqrt{-1}}{1-\tang\varphi\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$$
$$d\left\{\tang\varphi\sqrt{-1} + \frac{(\tang\varphi\sqrt{-1})^3}{3} + \frac{(\tang\varphi\sqrt{-1})^5}{5} + \ldots\right.$$

also $d\varphi = d\left\{\tang\varphi - \frac{1}{3}\,tg\varphi^3 + \frac{1}{5}\,tg\varphi^5 - \frac{1}{7}\,tg\varphi^7 + \ldots\right.$ gibt.

§. 9. Lassen wir das φ in diesem Differentiale fernerhin auf Kreisbogen im ersten Quadranten eingeschränkt: so folgt daraus, dafs ohne allen constanten Bogen

$$\varphi = \tang\varphi - \frac{1}{3}\tang\varphi^3 + \frac{1}{5}\tang\varphi^5 - \frac{1}{7}\,tg\varphi^7 + \ldots \delta)$$

seyn mufs.

Eine sehr bekannte, merkwürdige Reihe, welche hier vermittelst der eingeführten so genannten unmöglichen Tangenten gewonnen ist, weil durch diese $\tang\varphi.\sqrt{-1} = x$ gesetzt, eine Vergleichung zwischen dem trigonometrischen $dX = \frac{dx}{1+xx}$ und dem logarithmischen $d\mathfrak{X} = \frac{dx}{1-xx}$ konnte bewerkstelligt werden.

Dafs aber diese Formel nicht allgemein ist, nicht für jede gegebne Tangente den im ersten Quadranten ihr zugehörigen Bogen anzugeben vermag, sondern das Gebiet ihrer Möglichkeit auf die Tangenten von $= 0$ bis $= +1$ im ersten bejahten, und eben

so von $=0$ bis $=-1$ im ersten verneinten Quadranten, also überhaupt auf die Bogen, deren veränderliche Gradzahl nur bis auf 45° steigt, eingeschränkt seyn muſs, erhellet sogleich daraus, weil die Möglichkeit der Formel $\log\frac{1+U}{1-U}=2.\left\{U+\frac{U^3}{3}+\frac{U^5}{5}+\ldots\right.$ deren wir uns zur Herleitung mit bedient haben, auf ein U nicht >1 eingeschränkt ist (XI. § 36.), indem für jedes U von solcher Gröſse, es mag ein bejahtes oder ein verneintes seyn, $\frac{1+U}{1-U}$ eine verneinte Zahl seyn würde; und verneinte Zahlen keine Logarithmen möglich haben.

Sollte man hingegen einwenden, daſs ja $\operatorname{tg}\varphi.\sqrt{-1}$, als eine unmögliche Tangente weder bejaht noch verneint sey! so wird uns hier helfen, was wir schon erinnert haben, daſs ja eigentlich $\operatorname{tang}\varphi.\sqrt{-1}$, eine mögliche Tangente durch den unmöglichen Factor $\sqrt{-1}$ multiplicirt bedeutet; und dieser unmögliche Factor nur als ein Findungsmittel eingeführt wird, welches vor dem Gebrauche der dadurch gefundenen Formeln sich wieder fortgeschafft haben muſs, keinesweges aber berechtigt seyn kann, während seiner Hülfe auch negative Gröſsen eingeschwärtzt zu haben, wo diese zu der verbotenen Waare gehören.

§. 10. So gewiſs es also ist, daſs unser $d\varphi$, und daher auch φ, vermittelst dieser Logarithmenreihe entwickelt, des algebraisch unmöglichen $\sqrt{-1}$ wiederum völlig entledigt ist; eben so gewiſs ist es, daſs dessen Ausdruck durch die $\operatorname{tang}\varphi$ einer Logarithmen-Unmöglichkeit dergestalt unterworfen bleibt, daſs derselbe bei allen veränderlichen $\operatorname{tang}\varphi>1$ nur ungereimte Aussprüche für die Gröſse des dadurch bezielten Bogens einliefern kann. Im XVIIten Capitel, durch die Lehre vom Gröſsten und

Kleinsten, werden wir diese Ungereimtheit in ihren Wirkungen vorfinden. Hier ist sie so eben aus ihren Gründen erkannt worden, welche darin bestehen, dafs das trigonometrische Differential $d\,\mathrm{arc.tang}\,x$ der logarithmischen Differentialform unterworfen, nur bis zum $x = \mp 1$ hin möglich seyn kann, weil negative Zahlen nicht logarithmisirt werden können. Obgleich es immer schon Mathematiker gegeben hat, welche mit Euler und Bernouille behaupten, dafs alle mögliche Logarithmisirung auf bejahte Zahlen eingeschränkt sey: so waren doch die Gründe ihrer Meynung nicht so einfach und durchgreifend, als ich meines Erachtens in (X. §. 14.) diese Einschränkung erwiesen habe. So lange man aber über diese Möglichkeit und Unmöglichkeit der Logarithmen nicht deutlich entschieden war, konnte es auch leicht unbemerkt bleiben, dafs die obige Formel δ) über $\varphi = \mp\frac{\pi}{4}$ hinaus ungereimte Antworten geben müsse.

§. 11. Hat man diese Formel aus andern Gründen, z. B. mit Leibnitz durch die Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots$$

gefunden, indem aus derselben, ihr $x = \mathrm{tang}\,\varphi$ gesetzt, sogleich

$$\frac{d\,\mathrm{tang}\,\varphi}{1+(\mathrm{tang}\,\varphi)^2} = 1.\,d\,\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}\varphi^2.\,d\,\mathrm{tg}\varphi + \mathrm{tg}\varphi^4.\,d\,\mathrm{tg}\varphi - \ldots$$

also dieses Bogendifferential $d\varphi$ sich gerade wie vorhin ergibt, und daher auch auf dieselbe Reihe

$$\varphi = \mathrm{tang}\,\varphi - \frac{\mathrm{tang}\,\varphi^3}{3} + \frac{\mathrm{tang}\,\varphi^5}{5} - \frac{\mathrm{tang}\,\varphi^7}{7} \ldots$$

führen mufs: so wird man bei ihrer Anwendung allerdings es inne werden müssen, dafs sie über $\mathrm{tang}\,\varphi = 1$ hinaus unmittelbar nicht brauchbar sey; wird aber diese Unbrauchbarkeit lediglich in der Divergenz suchen. Indem man sich dann mit Euler Calc. differ. P. II. Cap. IV. der Reihen für den Bogen

$(\varphi + \omega) = \text{arc tang}(\varphi + \omega)$ bediente, und dabei schon der Bequemlichkeit wegen, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ setzte, so konnte jene von uns gefügte Unmöglichkeit der Reihe unbemerkt bleiben.

§. 12. Lagrange hat in seiner Théorie des Fonctions analytiques, Paris 1813. pag. 38., durch seine Entwickelungsmethode die Formel

$$\text{Arc tang } x\sqrt{-1} = (\text{tang } x - \tfrac{1}{3}\,\text{tg}\,x^3 + \tfrac{1}{5}\,\text{tg}\,x^5 \ldots).\sqrt{-1}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,x^2 - \tfrac{1}{4}\,\text{tang}\,x^4 + \tfrac{1}{6}\,\text{tang}\,x^6 \ldots$$
$$- \tfrac{1}{2}\,\sin x^2 - \tfrac{1}{4}\,\sin x^4 - \tfrac{1}{6}\,\sin x^6 \ldots$$

gefunden.

Um aus dieser Gleichung auf einen möglichen Bogen $\varphi = \text{Arc tang}\,x$ zu schliefsen, würde man ihre beiden Seiten durch $\sqrt{-1}$ dividiren müssen. Da dann aber dieses $\sqrt{-1}$ als Divisor der zweiten und dritten Zeile zurück bleiben müfste: so sieht man wohl, dafs diese Entwickelung der Formel noch nicht geeignet ist, um sich des $\sqrt{-1}$ entledigt zu sehen.

§. 13. Lagrange hat sich dazu eines Mittels bedient, welches uns nachher bei einer Eulerischen Schlufsfolge als richtig einleuchten wird, von ihm aber sehr misverständlich ausgedrückt ist.

Da man die Wurzel $\sqrt{-1}$ bejaht und verneint nehmen kann, sagt er, so lafst uns, da sie als $+\sqrt{-1}$ in der obigen Gleichung schon vorkommt, auch als $-\sqrt{-1}$ in derselben Gleichung aufführen. Wenn wir dann die dadurch erhaltene zweite Gleichung von der ersten abziehen: so erhalten wir eine Gleichung, welche durch $2\sqrt{-1}$ dividirt, uns

$$\text{Arc tang } x = \text{tang}\,x - \tfrac{1}{3}\,\text{tang}\,x^3 + \tfrac{1}{5}\,\text{tang}\,x^5 \ldots \text{ gibt.}$$

§. 14. Aus unserer obigen Herleitung dieser Formel werden wir deutlicher einsehen, wie die mit $\sqrt{-1}$ behafteten Glieder theils sich gegenseitig aufheben, theils durch den Divisor $\sqrt{-1}$, dieses Factors entledigt werden, und dafs wir die Gleichgültigkeit des $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$, oder, welches noch ärger wäre, die bekannte Zweideutigkeit der Quadratwurzeln, dabei zu fordern, keinesweges veranlafst sind.

Sondern um das Differential $\frac{\mathrm{d\,arc\,tang\,x}}{1+xx}$ mit dem Differential $\frac{\mathrm{d\,arc\,tang\,x}}{1-xx}$, welches durch logarithmische Differentiale ausgedrückt werden kann, in Vergleichung zu bringen, mufsten wir das unmögliche $x\sqrt{-1}$ statt des möglichen x ansetzen, wodurch wir $\frac{\mathrm{d\,arc\,tang\,x}\sqrt{-1}}{1+(x\sqrt{-1})^2} = \sqrt{-1}.\ \frac{\mathrm{d\,arc\,tang\,x}}{1-xx}$ erhielten.

Da aber in dem vorgegebnen ersten trigonometrischen Differential, dessen Glied $+xx$ nicht nur $= +(+x.+x)$, sondern auch $= +(-x.-x)$ ist; im zweiten aufgeführten Differential, dessen Glied $-xx$ nicht nur $= -(+x.+x)$, sondern auch $= -(-x.-x)$ ist; der Zähler $\mathrm{d\,arc\,tang\,x}$ aber, wenn 1) ausdrücklich auf eine bejahte Tangente $+x$, und dann 2) auf eine verneinte Tangente $-x$ eingeschränkt wird, im 2ten Falle eben so das verneinte Differential $-\mathrm{d}\varphi$ des verneinten Bogens $-\varphi$, als im 1ten Falle das bejahte Differential $+\mathrm{d}\varphi$ eines bejahten Bogens $+\varphi$ angebend ist, und seyn mufs: so erhellet, dafs wir, um auch für die verneinten Bogendifferentiale die obige Vergleichung zu gewinnen, nothwendig statt des möglichen $-x$ das unmögliche $-x\sqrt{-1}$ schreiben müssen, indefs wir dagegen für die bejahten Bogen statt des möglichen $+x$ das unmögliche $+x\sqrt{-1}$ schreiben mufsten.

§. 15. In keinem von diesen beiden Fällen mufs von dem Factor $\sqrt{-1}$ vermuthet werden, dafs er entweder ein $+\sqrt{-1}$ oder ein $-\sqrt{-1}$ seyn solle, sondern schlechthin der Factor $\sqrt{-1}$, der eben deshalb unmöglich ist, weil er weder eine bejahte noch eine verneinte Gröfse seyn kann. Und wo irgend in dem Calcul ein $+\sqrt{-1}$, oder ein $-\sqrt{-1}$ vorkommt, da mufs man sich jenes als ein $+1.(\sqrt{-1})$, und dieses als ein $-1.(\sqrt{-1})$ denken; so dafs in jedem Falle die Parenthese eine Gröfse enthält, welche weder etwas bejahtes noch etwas verneintes seyn kann, dessen unbeschadet aber die Summe aus beiden allemal $=(+1-1).\sqrt{-1}=0.\sqrt{-1}=0$ seyn mufs.

§. 16. Zu mancherlei Gebrauche ist es nöthig, in der obigen Formel §. 9.

$d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, d\, \log \frac{1+\tan g\,\varphi.\sqrt{-1}}{1-\tan g\,\varphi.\sqrt{-1}}$ statt $\tan g\,\varphi$ lieber $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ zu schreiben. Wenn dieses geschehen ist, und man dadurch $d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, d\, \log \frac{\cos\varphi+\sin\varphi.\sqrt{-1}}{\cos\varphi-\sin\varphi.\sqrt{-1}}$ erhalten hat; soll auch in dieser Formel der Bogen φ nicht über 45 Grad steigen dürfen?

Ich denke hierauf folgendes richtig zu erwiedern. Ob man vermittelst dieser Formel den Bogen φ durch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, oder ob man ihn nach der vorigen Formel geradezu durch $\tan g\,\varphi$ auszudrücken sucht, das würde doch auf mehre und gröfsere Bogen φ die Formel auszudehnen nicht vermögen. Daher ich urtheilen möchte, dafs schon aus diesem Grunde, die vom Herrn Hofr. Mayer in seinem Lehrbegriffe der höhern Analysis, Differentialrechnung §. 48., aus obigem $d\varphi$ abgeleitete Formel für $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ nicht, wie es ihm geschienen hat,

auch für gebrochene Zahlen n, und alle Winkel φ als brauchbar erwiesen sey. *)

§. 17. Unter der Einschränkung, dafs n keine andere als ganze und bejahte Zahlen zu bedeuten brauche, können dieselben Formeln für $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$, wie sie im §. 19. vorkommen, unabhängig von obigem Bogendifferential $d\varphi$ lediglich aus den beiden Sätzen,

1) dafs $\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi = \cos(\vartheta+\varphi)$ und 2) dafs $\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi = \sin(\vartheta+\varphi)$ ist, gefolgert werden; und diese beiden Sätze bleiben durchaus richtig, ϑ und φ mögen noch so kleine oder noch so grofse, und bejahte oder verneinte Bogen bedeuten, welche sie wollen.

Um die sämmtlichen dazu nöthigen Schlüsse mit äufserster Kürze vor Augen zu haben; pflegt man sich in der neuern Analyse wiederum, auch mit Recht und völliger Bündigkeit, einer unmöglichen Gröfse zu bedienen; am besten hier des $\sqrt{-1}.\sin\vartheta$ und $\sqrt{-1}.\sin\varphi$. Will man dieses unmögliche Sinus nennen, so wird man hinzufügen, dafs jeder Sinus, welcher gröfser als der Halbmesser 1 verlangt würde, eben deshalb ein unmöglicher Sinus zu nennen wäre. Aber da es für die vorhin gebrauchten $\text{tang}\,\varphi.\sqrt{-1}$ dergleichen Ausdeutung nicht gibt, sondern diese etwas anderes nicht bedeuten können, als dafs eine mögliche Tangente durch den unmöglichen Factor $\sqrt{-1}$ einstweilen multiplicirt gedacht werden soll: so wird es auch hier das richtigste seyn, sich ebenfalls nur mögliche $\sin\vartheta$ und $\sin\varphi$, durch den unmöglichen Factor $\sqrt{-1}$ multiplicirt verlangt, zu denken; da es

*) Etwas mehr darüber habe ich so eben in einem für die Isis bestimmten Aufsatze niedergeschrieben.

dann sogleich völlig einleuchtend ist, dafs aus der Gleichung 2) auch die Gleichung

2*) $\cos\vartheta . \sin\varphi . \sqrt{-1} + \sin\vartheta . \sqrt{-1} . \cos\varphi = \sin(\vartheta+\varphi) . \sqrt{-1}$ folgen mufs; wodurch nun der unmögliche Factor $\sqrt{-1}$ ein sehr bequemes Mittel wird, auf folgende Weise zu schliefsen, und dabei sehr bald die Gleichung 1) benutzen zu können.

§. 18. Da $(\cos\vartheta + \sin\vartheta . \sqrt{-1}) . (\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}) = \cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi + (\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi) . \sqrt{-1}$ wegen 1) und 2*)

also $= \cos(\vartheta+\varphi) + \sin(\vartheta+\varphi) . \sqrt{-1}$ ist ..... I)

so mufs $\vartheta = \varphi$ gesetzt,

$(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})^2 = \cos 2\varphi + \sin 2\varphi . \sqrt{-1}$ geben II)

und $\vartheta = 2\varphi$ gesetzt,

$(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi . \sqrt{-1}) . (\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}) = \cos 3\varphi + \sin 3\varphi . \sqrt{-1}$

wegen II) also auch

$(\cos\varphi + \sin\varphi \sqrt{-1})^3 = \cos 3\varphi + \sin 3\varphi . \sqrt{-1}$ geben III)

Hiebei liegt es vor Augen, dafs man eben so auch weiter auf die 4te, 5te Dignität, also überhaupt, unter dem Beding, dafs n eine bejahte ganze Zahl sey,

auf $(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi . \sqrt{-1}$ schliefsen kann ..... N)

auch, dafs man $(\cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi - \sin n\varphi . \sqrt{-1}$, welches .... $\mathfrak{N}$) heifsen mag, erhalten müfste, wenn man in allen obigen Gleichungen statt des Factors $\sqrt{-1}$ den Factor $-\sqrt{-1}$ gefordert hätte.

§. 19. Da nun $N + \mathfrak{N}$ uns

$$\cos n\varphi = \frac{(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^n + (\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^n}{2}$$

und $N - \mathfrak{N}$ uns

$$\sin n\varphi = \frac{(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^n - (\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$$

gibt: so haben wir hiemit die bekannten, gewöhnli-

chen Formeln für cos $n\varphi$ und sin $n\varphi$, mit Euler, Introd. in analysin infinit. T. I. §. 133. aus solchen Gründen geschlossen, welche für jede beliebige Gröfse des Bogens φ gültig sind.

§. 21. Die nten Potenzen in diesen Formeln, durch die gewöhnliche Binomialreihe entwickelt, geben uns, des unmöglichen Factors $\sqrt{-1}$ völlig entledigt,

$$\cos n\varphi = \cos\varphi^n - \frac{n.\,n-1.}{1.\,2}\cos\varphi^{n-2}\sin\varphi^2 + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.}{1.\,2.\,3.\,4}\cos\varphi^{n-4}\sin\varphi^4 \ldots$$

$$\sin n\varphi = \frac{n}{1}\cos\varphi^{n-1}\sin\varphi - \frac{n.n-1.n-2}{1.\,2.\,3}\cos\varphi^{n-3}\sin\varphi^3 + \frac{n.\ldots n-4}{1.2.3.4.5}\cos\varphi^{n-5}\sin\varphi^5 \ldots$$

In diesen Reihen $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \text{tang}\,\varphi$ geschrieben, geben sie auch

$$\cos n\varphi = \cos\varphi^n.\left(1 - \frac{n.\,n-1.}{1.\,2}\,\text{tang}\varphi^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.\,2.\,3.\,4}\,\text{tang}\varphi^4 - + \ldots\right)$$

$$\sin n\varphi = \cos\varphi^n.\left(\frac{n}{1}\,\text{tang}\,\varphi - \frac{n.n-1.n-2}{1.\,2.\,3}\,\text{tang}\,\varphi^3 + \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4.}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\,\text{tang}\,\varphi^5 - + \ldots\right)$$

§. 22. Man fürchte nicht, dafs es so grofse φ geben könne, für welche diese Reihen etwas unschickliches angeben möchten, auch wenn n eine ganze bejahte Zahl ist.

Sey sogar $\varphi = 90°$, also tang $\varphi = \infty$, so ist dann cos $\varphi = 0$; und wenn man nun z. B. für $n = 3$

$\cos 3\varphi = \cos\varphi^3\,(1 - 3\,\text{tang}\,\varphi^2) = \cos\varphi^3 - 3.\cos\varphi^3.\text{tg}\varphi^2$

$\sin 3\varphi = \cos\varphi^3\,(3\text{tg}\varphi - \text{tg}\varphi^3) = 3\cos\varphi^3\,\text{tg}\varphi - \cos\varphi^3.\text{tg}\varphi^3$

also $\cos 3.90^\circ = 0.0.0 - 3.0.1.1 = 0$ (u. Vorer. IX. §. 11.), auch $\sin 3.90^\circ = 3.0.1.1 - 1.1.1 = -1$ ganz richtig, auch z. B. für $n = 4$, ganz richtig $\cos 4.90^\circ = 1$ und $\sin 4.90^\circ = 0$ ganz richtig gefunden hat: so liegt sogleich vor Augen, wie sich für jede andere ungerade oder gerade ganze bejahte Zahl; selbst auch für $\text{tang}\,\varphi = \infty$, die Cosinus und Sinus des $n\varphi$ richtig angeben müssen.

Wenn aber n eine verneinte oder bejahte gebrochene Zahl ist, so geht die Reihe ins unendliche fort, und muſs für $\text{tang}\,\varphi > 1$ sich divergent ergeben.

§. 23. Da $\infty . \frac{\varphi}{\infty} = \varphi$ seyn muſs,

auch $\infty.\infty - 1 = \infty.\infty$; $\infty.\infty - 1.\infty - 2. = \infty\infty\infty$ u.s.w. ganz genau ist (Vorer. IX.), da ferner nicht nur $\sin \text{arc}\frac{\varphi}{\infty} = \text{tang arc}\frac{\varphi}{\infty}$, sondern auch $\text{tg arc}\frac{\varphi}{\infty} = \frac{\text{arc}\,\varphi}{\infty}$ geworden seyn, (IX. §. 16.) und $\cos\frac{\varphi}{\infty} = \cos 0 = 1$, also auch $\left(\cos\frac{\varphi}{\infty}\right)^{\infty} = 1^{\infty} = 1$ geworden seyn muſs: so ergibt sich aus §. 21, das dortige $\varphi = \frac{\varphi}{n}$, und $n = \infty$ gefordert, daſs

$$\cos\varphi = 1.\left(1 - \frac{\infty\infty}{1.2}\frac{\varphi^2}{\infty\infty} + \frac{\infty.^4\varphi^4}{1.2.3.4.\infty^4} - \frac{\infty^6\varphi^6}{1.2.3.4.5.6.\infty^6} + -\right)$$

$$= 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6} + -$$

und $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1.2.3.4.5.6} + - \ldots$

§. 24. Aus §. . gefolgert,

daſs $\varphi.2\gamma - 1 = \log\frac{\cos\varphi + \sin\varphi\gamma - 1}{\cos\varphi - \sin\varphi\gamma - 1}$ ist, können

wir auch behaupten, dafs h die Basis des hyperbolischen Systemes bedeutend

$$h^{\varphi.2\Upsilon-1} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi\,\Upsilon-1}{\cos\varphi - \sin\varphi\,\Upsilon-1}$$ seyn muſs; indem ja überhaupt, wo $h\lambda = L$ ist, $\lambda = \log L$, d.i. $= \log \text{nat}\, L$ seyn muſs, und umgekehrt, wo $\lambda = \log L$ ist, auch $h^{\lambda} = L$ seyn muſs. (X. §. 1, 2.)

Mehre dergleichen durch h ausgedrückte trigonometrische Functionen, welche durch gehörige Behandlung ihres unmöglichen Factors zu entledigen sind, werden in der Integralrechnung vorkommen.

Vierzehntes Capitel.

Anwendung der Differentialquotienten zur Bestimmung der Tangenten-Lage.

§. 1. Auch schon in der Elementargeometrie hat man Tangenten schlechthin, und trigonometrische Tangenten zu unterscheiden. Jede trigonometrische Tangente AT (Fig. 12) ist nur ein Theil der unendlichen geraden Linie UO, welche den Kreis in A berührt, und in ihrer ganzen beiderseitigen Unendlichkeit eine Tangente des Kreises in A heiſst.

Jede trigonometrische Tangente AT gehört dann nur solchen Bogen AM des Kreises zu, die ihren Anfang in A, ihr Ende in M haben; und obgleich für den Fall, dafs AM = 90 Grad (oder auch, n jede ganze Zahl bedeutend) $= (\mp n.4+1).90$ Grad ist, seine Tangente AT, die nach O hin gerichtete unendlich groſse AO geworden seyn muſs; und eben so die unendlich

grofse AU, eine trigonometrische Tangente z. B. für alle $A\mathfrak{M} = (\mp n.4 - 1).90$ Grad ist: so würde doch jede von diesen einseitig unendlichen Linien AO und AU nur für die Hälfte von der zweiseitig unendlichen UO etwa können anerkannt werden.

§. 2. Auch in dem allgemeinen Tangentialsysteme, welches nicht mehr auf den Kreis eingeschränkt ist, wird bisweilen unter der Tangente nur ein bestimmter Theil der unendlichen geraden Linie verstanden, von welcher eine Curve berührt wird.

Sey z. B. die Curve, Fig. 13., durch eine Gleichung zwischen Abscisse AP = x und Ordinate PM = y bestimmt, die wir hier, obgleich nicht nothwendig, doch hier ausreichend, allemal einander normal (rechtwinklich) annehmen wollen: so heifst MS die Tangente, wenn von der unendlichen geraden Linie, welche die Curve in M berührt, die Abscissenlinie AP in S getroffen wird. Neben dieser Tangente wird dann noch 2) die Subtangente PS genannt, auch 3) ME, welche der Tangente SM in M normal, bis zur Abscissenlinie hin, gezogen wird, die Normale genannt, und 4) PE die Subnormale.

§. 3. Wir aber werden von diesen 4 Linien fürs erste, bis wir dereinst zu den Berührungen zweier Curven, ihren Küssungen und Krümmungsmessern kommen, für jetzt hauptsächlich nur die Subtangente PS auch in Hinsicht ihrer Gröfse und Richtung zu benutzen haben, um für die Tangente lediglich ihre Lage zu bestimmen. Diese Lage aber wird nun in vielen Fällen auf das bequemste durch die Gröfse und Richtung der Subtangente PS bestimmt, indem ja die gerade Linie SM, aus dem Endpuncte S der Subtangente durch den verlangten Berührungspunct M gezogen, in der Tangente liegt. Nächst der Subtangente werden wir indessen auch

von der Subnormale einen baldigen Gebrauch zu machen haben.

Lehrsatz.

§. 4. I. Die *Länge* der Subtangente PS ist $PS = y\frac{dx}{dy}$; aber II. die *algebraische Grösse*, die *Länge und Richtung* der Subtangente wird durch $PS = -y\frac{dx}{dy}$ bestimmt.

Beweis für I.

§. 5. Sey $NM' = dy$ die dem $PP' = dx$ (welchem die MN parallel und gleich ist) zugehörige Veränderung der Ordinate $PM = y$, schon sehr klein, aber noch nicht $= o$ geworden: so wird die durch M' und M gezogene gerade Linie die Abscissenlinie in S' treffend,

die Proportion $M'N : NM = MP : PS'$

das ist $dy : dx = y : PS'$ also $PS' = \frac{dx}{dy} \cdot y$

geben. Aber die Linie MM'S' ist noch eine Secante, von welcher die Curve in M (bisweilen auch in M') geschnitten wird. Auf jeden Fall hat die gerade S'MM' mit der Curve, aufser dem Puncte M auch den Punct M' gemein. Wenn aber dx immerfort kleiner und kleiner bis auf $= o$ geworden, dadurch die Sehne MM' immerfort kleiner und kleiner, und zum Puncte M geworden ist: so hat sich die Lage der M'MS' der Lage der Tangente MS dergestalt genähert, dafs der Unterschied ihrer Lagen $= o$ geworden ist; daher die Subtangente $PS = y\frac{dx}{dy}$ mit dem Beding ist, dafs dx und dy jedes $= o$ geworden sey.

Beweis für II.

Die vorige Proportion $M'N : NM' = MP : PS'$ ist $-dy : -dx = -y : PS'$, wenn man nicht blofs auf die absoluten Längen, sondern auch auf die Richtungen ihrer ersten drei Glieder achtet, durch welche dann aufser der Länge auch die Richtung des 4ten Gliedes $PS' = -y\frac{dx}{dy}$ bestimmt wird.

Uebrigens schliefst man wie vorhin, dafs die Subsecante PS' zur Subtangente PS werdend, und geworden seyn mufs, wenn man sich dx und folglich auch dy immer kleiner und kleiner werdend, und dadurch $= o$ geworden gedacht hat.

Anmerkung.

§. 6. In der kleinen Schrift „Formulae linearum subtangentium et tangentium etc. Lipsiae 1779." habe ich diese Richtungsbestimmung für die Subtangente umständlicher erörtert, auch dargethan, dafs alle bis dahin von den Mathematikern versuchten Ausdeutungen des $\mp$ in der Subtangentenformel unrichtig, und sich selbst widersprechend ausgefallen waren. Ueber Klügels späterhin dann vorgetragene Erklärung habe ich im IIten Anhange zu der Schrift: Formulae radii osculatoris, Dresdae 1825, mich ausgesprochen.

Lehrsatz.

§. 7. I. Die *Länge* der Subnormale PE ist, $= y\frac{dy}{dx}$ und II) auch in Hinsicht ihrer *Richtung* ist die Subnormale $PE = y\frac{dy}{dx}$.

Beweis für I.

§. 8. In den rechtwinklichen und ähnlichen Dreiecken SPM und PME ist

$$PS : PM = PM : PE$$

d. i. $S : y = y : PE$, wenn S die Länge der Subtangente bedeutet,

also $y\frac{dx}{dy} : y = y : PE$, folglich $PE = y\frac{dy}{dx}$.

Beweis für II.

Soll die PE auch in Hinsicht ihrer Richtung gefunden werden: so ist dafür die vorige Proportion $PS : PM = PM : PE$ nicht brauchbar; weil ja PS und PE entgegengesetzt, die beiden PM aber gleich gerichtet sind. Keine von den 8 Proportionen

$(\mp)PS : (\mp)PM = (\mp)PM : (\pm)PE$

und $(\pm)PS : (\mp)PM = (\mp)PM : (\mp)PE$ ist richtig für die algebraische Richtungsgeometrie!

Richtig dafür ist dagegen z. B.

die Proportion $SP : PM = PM : PE$

das ist $-PS : PM = PM : PE$

das ist $-\left(-y\frac{dx}{dy}\right) : PM = PM : PE$

das ist $y\frac{dx}{dy} : y = y : PE$, also die Subnormale $PE = y\frac{dy}{dx}$; auch in Hinsicht ihrer Richtung.

Aufgabe.

§. 9. Die Subtangente PS und Subnormale PE für einen gegebnen Punct M in der *Parabel* $yy = bx$, zeichenrichtig zu finden. (Fig. 14.)

Auflösung.

§. 10. Für den gegebnen Punct M ist $PM = y$ die Ordinate, der Abscisse $AP = x$ zugehörig. Da nun die Parabelgleichung $yy = bx$, unentwickelt differentiirt (VII. §. 5.) uns $2ydy = bdx$, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2y}$ und $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{b}$ gibt; die allgemeine zeichenrichtige Formel aber, für die Subtangente $PS = -y\frac{dx}{dy}$, und für die Subnormale $PF = y\frac{dy}{dx}$ ist: so hat man für die Parabel, die Subtangente $PS = -y.\frac{2y}{b} = -\frac{2yy}{b} = -\frac{2bx}{b} = -2x$ und die Subnormale $PE = y.\frac{b}{2y} = \frac{b}{2}$.

Es ist demnach in der Parabel jede Subtangente PS, die Gegengröfse der doppelten Abscisse AP, nämlich 2 mal so lang als die Abscisse, und ihr entgegen gerichtet. Jede ihrer Subnormalen aber ist dem halben Parameter gleich, und dem Parameter auch gleich gerichtet.

Anmerkung.

§. 11. Der Parameter $AB = b$ wird für die Parabel allemal bejaht gerichtet angenommen, wenn nicht etwas anders darüber ausdrücklich bestimmt wird. Wird aber von ihm verlangt, dafs er verneint gerichtet angenommen werden soll, so sind auch die beiden Schenkel der Parabel von ihrem Scheitelpuncte an durchaus ins Verneinte hinlaufend; und so ist überhaupt in jeder Parabel derjenige Theil der halbmessenden Axe, welcher vom Scheitel anfangend, mögliche Ordinaten hat, von da an dem gegebnen Parameter gleich gerichtet, es mag nun dieser bejaht, oder verneint, oder auch in beider Hinsicht diagonal gerichtet seyn.

Aufgabe.

§. 12. Die Subtangente PS für einen gegebnen Punct M oder $\mathfrak{M}$ des Kreises $yy = 2ax - xx$ zeichenrichtig zu finden. (Fig. 15.)

Auflösung.

§. 13. In der, hier gegebnen Kreisgleichung ist 2a der Durchmesser AB, und der Abscissen Anfang in A. Für den gegebnen Punct M, er mag liegen wo er wolle, sey $PM = y$ die Ordinate, und $AP = x$ die Abscisse.

Die zeichenrichtige allgemeine Formel für jede Subtangente ist $= -y\frac{dx}{dy}$ Da nun die Kreisgleichung differenziirt, uns $2ydy = 2adx - 2xdx$, also $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{a-x}$ gibt: so hat man, für diese Kreisgleichung, jede Subtangente $PS = -y.\frac{y}{a-x} = -\frac{yy}{a-x}$.

Da ferner in dieser Kreisgleichung jede Abscisse für mögliche Puncte der Gleichungscurve bejaht gerichtet ist, wenn die gegebne Linie 2a es seyn soll, wie wir hier voraussetzen wollen: so ist die Subtangente PS verneint oder bejaht gerichtet, je nachdem a−x bejaht oder verneint ist, also, je nachdem die Abscisse x kleiner oder gröfser als der Halbmesser a ist.

Zusatz.

§. 14. Ist $x = a$, also einer von den beiden, in der Figur punctirten, Fällen dem gegebnen Puncte zugehörig, so ist die Subtangente $PS = -\frac{yy}{a-x} = -\frac{aa}{0} = -\infty$ allerdings! Ob nun

aber dieses $-\infty$ ein ins Bejahte oder ins Verneinte unendlich fortlaufendes PS sey, dieses kann nicht eher entschieden werden, als bis man über die Richtung des $\frac{aa}{o} = \infty$ entschieden ist. Diese Entscheidung hängt offenbar von dem $\mp$ der o ab. Der sonst gewöhnliche Ausspruch, dafs die o sowohl bejaht als verneint sey, ist falsch (man sehe Vorerinnerung VII. §. 6.); sondern eine o an und vor sich, ist weder bejaht, noch verneint. Wenn sie aber die Gränze von Gröfsen ausmacht, die stetig bis auf $= o$ abnehmen: so mufs sie als solche selbst auch für verneint oder bejaht geachtet werden, je nachdem die abnehmenden Gröfsen es waren. Vorerin. VII. §. 8.

Demnach hat man $PS = -\frac{\infty}{-o} = -(-\infty) = +\infty$, wenn im $a-x = o$ werden, die x gröfser als a waren, und dagegen $PS = -\frac{\infty}{+o} = -\infty$, wenn, im $a-x = o$ werden, die x kleiner als a waren.

Erklärung.

§. 15. Hohl oder erhaben (concav oder convex) soll hier der berührte Bogen genannt werden, je nachdem er gegen die Abscissenlinie hohl oder erhaben ist. *)

Nicht nur in den beiden Beispielen, auf die wir so eben die allgemeinen Formeln der Subtangente angewandt haben, sind die Bogen hohl, sondern es ist auch in der Fig. 13. für den Beweis der Formel (§. 4.5) gerade ein hohler Bogen gezeichnet. Anfängern rathe

*) Weil es so gewöhnlich, und hier unschädlich ist. Späterhin, bei Anstellung der Krümmungsmesser mufs eine verbesserte Abtheilung erörtert werden.

ich sehr an, nunmehr auch denselben obigen Beweis für den convexen Bogen nach Fig. 16. sich anschaulich anzuwenden.

Bei den höheren Gleichungs-Curven, deren Gestalt uns noch unbekannt ist, auch in manchen Theilen nur dem Verstande noch begreiflich bleibt, dem Auge gar nicht dargestellt werden kann, (weil, bei manchen Werthen der in der Gleichung gegebnen Grössen, sich in einen einzigen Punct zusammen zieht, was bei andern Werthen aus concaven und convexen Bogen besteht,) ist namentlich auch für die Bestimmung der Tangenten-Lage grofse Genauigkeit nöthig, wenn nicht manche wichtige Folgerungen unrichtig ausfallen, oder doch undeutlich und zweifelhaft bleiben sollen.

§. 16. Das erste Studium dieser höheren Geometrie pflegt den Anfängern auch dadurch schwierig zu werden, dafs sie in der Elementargeometrie lediglich am Kreise Tangenten zu ziehen hatten, und dadurch veranlafst wurden, dortige blofse Zufälligkeiten der tangirenden Linien, als allgemeine wesentliche Eigenschaften dieser unendlichen Linien auch bei allen andern Curven zu erwarten. Es wird den Anfängern viel Zeitaufwand und manches Misverständnifs erspart werden, wenn sie jener allzu eingeschränkten Begriffe durch folgende Bemerkungen sogleich mit Deutlichkeit entledigt werden. Was indessen die 5te Bemerkung betrifft, so dürften auch geübtere Leser darüber ungewifs bleiben, bis sie späterhin es durchsehen, welchen Mängeln und Unrichtigkeiten in der gewöhnlichen Lehre des Gröfsten und Kleinsten dadurch entgegnet wird.

Nur an einigen Curven ist es, wie am Kreise, der Fall, dafs

1) jeder Punct der Curve nur **eine einzige** Tangente hat;

2) dafs diese Tangente nur den einzigen Punct M, in welchem sie die Curve berührt, mit derselben gemein hat;

3) dafs jede andere gerade Linie, welche von der Lage der berührenden irgend abweichend durch den Punct M geht, überdies noch einen Punct wenigstens mit der Curve gemein haben müsse;

4) dafs keine solche Linie, von welcher die Curve in M **geschnitten** wird, zugleich auch eine Tangente dieser Curve in eben dem Puncte M seyn könne;

5) dafs jeder Punct in einer solchen Curve, von welcher eine Ebne stetig umgränzt wird, ein mittlerer Punct des in ihm berührten Bogens sey, sondern selbst auch in den eben genannten Curven gar oft nur einen Gränzpunct des berührten Bogens ausmacht.

Auch geübten Geometern scheint es entgangen zu seyn, dafs z. B. der neuere analytische Gleichungskreis, allemal aus **zweien** Zügen besteht, da hingegen der alte Euklidische Kreis freilich nur einen einzigen Zug ausmacht; wie es aus den beiderseitigen sehr verschiedenen Definitionen an seinem Orte erhalten wird.

§. 17. Sehr häufig ist es allerdings der Fall, dafs die Lage der Tangenten durch die algebraische Gröfse, also durch die **Länge und Richtung** der Subtangenten, sehr bequem und augenfällig bestimmt wird; wobei es dann sogleich einleuchtet, dafs diese Lage auch durch die trigonometrische Tangente des Winkels SPSM (Fig. 16. 15. 13.) bestimmt wird, und z. B. die SP als trigonometrischen Halbmesser angenommen, auch PM selbst schon die trigonometrische Tangente

des Winkels SPSM ist. (Was man in Hinsicht der bejahten oder verneinten Richtung dieses Halbmessers zu beachten habe, werde ich beibringen, wo in der Folge, ohne diese Beachtung, Undeutlichkeit oder Unrichtigkeit entstehen müfste, wie sie häufig genug auch bei den besten Lehrern entstanden, unbemerkt und unbeseitigt geblieben ist.)

Eben so häufig aber ist es einleuchtend, besonders bei zwar parallelen, aber den Abscissen nicht normalen Ordinaten, oder sogar drehenden Ordinaten und krummlinigen Abscissen, dafs man besser den Differentialquotienten unmittelbar zur Bestimmung der Tangentenlage benutzt; wofür der folgende Lehrsatz die erste und allgemeinste Begründung ausmacht; obgleich für jetzt wiederum orthogonale Coordinaten x und y dabei vorausgesetzt werden sollen.

Lehrsatz.

§. 18. Die in M von der geraden Linie berührte Curve MM′ mag hohl (Fig. 17.) oder erhaben (Fig. 18.) seyn: so ist der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\mu$, wenn μ den Winkel zwischen der Richtung des $MN = dx$ und der Tangentenrichtung MT bedeutet.

Beweis.

§. 19. Sey $y = X$ und X eine Function des x, von den uns bereits bekannt gewordenen, welche es wolle:

so ist $\frac{dy}{dx} = p + Qdx + Rdx^2 + \ldots$

das ist $\frac{NM'}{MN} = p + Qdx + Rdx^2 + \ldots$ der werdende Differentialquotient, indem wir $MN = dx$ immerfort kleiner und kleiner werdend, also auch die $NM' = dy$

noch in der Annäherung an den Punct M begriffen uns denken. Sobald durch diese Annäherung, $MN = dx = o$ geworden ist, folglich auch $NM' = dy$ im Puncte M sich vernullt hat: so haben wir den gewordenen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o} = p$; und das lineäre $\frac{NM'}{MN} = \frac{NT'}{MN} = \frac{o}{o} = p$ geworden, mufs eben dadurch demjenigen Verhältnisse $\frac{ET}{MT}$ gleich geworden seyn, durch welches der Winkel zwischen der ME und der tangirenden MT bestimmt wird, weil dieser Winkel weder gröfser noch kleiner als derjenige Theil der noch veränderlichen Winkelgröfse NMM' seyn mufs, welcher von derjenigen Veränderlichkeit dieser Gröfse, durch welche dx und dy sammt MM' als Sehne und Bogen, $= o$ geworden seyn kann, unabhängig ist.

Der mit dx veränderliche Theil dieser Winkelgröfse mag nun eine mit dx abnehmende Vergröfserung (wie in Fig. 17. des concaven Bogens) oder eine mit dx abnehmende Verkleinerung (wie in Fig. 18. des convexen Bogens) ausmachen, so ist die davon unabhängig gewordene Tangentenzahl $= p$; und daher der genaue Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = p = \frac{ET}{MT} = \text{tang}$ trigonometr. $ME\,MT = \text{tang}\,\mu$, wenn die ME als trigonometrischer Halbmesser $= 1$ gesetzt wird, also die ihr normale (dem normalen $dy = NM'$ parallele) ET die trigonometrische Tangente des Winkels μ ausmacht.

Zusatz.

Die Länge ME kann dabei nach Belieben angenommen werden; ihre bejahte oder verneinte Rich-

tung betreffend, sollen in Hinsicht der dabei mit anzulegenden trigonometrischen Scala merkwürdige Warnungen, wo sie nöthig werden, erfolgen; eben so auch ihre Richtung für verschwindende krummlinige dx betreffend, und eben so auch für geradlinige dx, wo deren Richtung und Gegenrichtung einen versteckten Einfluss hat. Für die nächsten Anwendungen aber ist nur nöthig zu bemerken:

1) dass des werdenden Differentialquotienten unabhängiges Glied p allerdings nicht selten selbst auch $=0$ seyn kann, und dann durch $\frac{dy}{dx} = \text{tang } \mu = 0$ hier durch $\mu = 0$, wie oben §. 13. durch die unendlich grosse Subtangente, bestimmt wird, dass die tangirende MT der Abscissenlinie parallel ist.

2) Dass eben so häufig auch $\frac{dy}{dx} = \text{tang } \mu = \infty$ also $\mu = 90$ Grad sich ergeben kann, also die tangirende MT der Abscissenlinie normal ist.

3) Mag man schon vorläufig bemerken, dass durch diese Differentialmethode lediglich die tangirende Linie für denjenigen Curventheil MM' bestimmt werden kann und soll, der mit dx immerfort kleiner und mit $dx = 0$ geworden, selbst auch $= 0$ geworden ist. Dergleichen Curventheile aber kann es in einigen Gleichungscurven ihrer mehrere geben. Schon in der Parabel gibt es deren an dem Scheitelpuncte ihrer zwei, AM und AM' (Fig. 19.)

Beispiele.

I. An der Parabel $yy = bx$, Fig 19, ist überhaupt $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2y}$, also $\text{tang } \mu = \frac{b}{2y}$ die trigonometrische Tangentenzahl des Winkels $\mu = MNMT' = MEMT$, wodurch die Lage der tangirenden MT bestimmt wird, lediglich für den Bogen MM'

Liegt M im Scheitel A, so ist $AP = x = o$ und $PM = y = o$, also in absoluter Gröfse $\text{tang}\,\mu = \frac{b}{2.o} = \infty$ und daher $\mu = 90°$ sowohl für den unendlich kleinen Bogen AM', der dem unendlich kleinen $+y$ zugehört, als auch für den unendlich kleinen Bogen A$\mathfrak{M}$', der dem unendlich kleinen $-y$ zugehört.

Indem nämlich den bejaht gerichteten Abscissen $AP = (+)x$ auch ein $(+)dx$ zugelegt wird, falls nicht das Gegentheil ausdrücklich erinnert ist (III. §. 30.), hier also $dy = \frac{b}{2y}dx$ bejaht oder verneint ausfallen mufs, je nachdem es y ist: so hat man $\frac{(+)dy}{(+)dx} = \frac{b}{\mp 2y}$, also $\text{tang}\,\mu$ bejaht oder verneint für $+y$ oder $-y$. Auch in A für $\mp y = \mp o$ hat man also $\text{tang}\,\mu = \mp\infty$, wodurch es nun bündig und systematisch bestimmt wird, dafs AT die Tangente für den unendlich kleinen Bogen AM' und dagegen A$\mathfrak{T}$ die Tangente für den unendlich kleinen Bogen A$\mathfrak{M}$' ist.

Funfzehntes Capitel.

Allgemeiner Ausdruck für alle algebraische und transcendente Functionen.

§. 1. Einige Lehrer mögen $A + Bx^{\alpha} + Cx^{\beta} + Dx^{\gamma}\ldots$ andere aber $Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta}\ldots$ als die allgemeine Form annehmen, welcher jede Function des x könne unterworfen werden; beides ist einerlei: denn in beiden Fällen soll jeder von den Coefficienten A, B, C... bald diese bald jene Gröfse, wenn

sie nur kein x enthält, also auch o seyn können; und die Bedeutung der Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ soll so allgemein seyn, als sie für das allgemeine Binomialtheorem kann erwiesen werden, also völlig allgemein.

Bei der letzten Form mufs man daher es ausdrücklich voraussetzen, dafs eine von diesen Dignitäten z. B. die α auch $= o$ genommen werde, falls die Function auch Glieder ohne x enthält und enthalten mufs; und bei der ersten Form setzt man voraus, dafs gerade $A = o$ gesetzt werden solle, falls die Function kein Glied ohne x in sich hat.

In beider Hinsicht wollen wir lieber

$A + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} \ldots$ als die allgemeine Form ansetzen, welcher jedes y, das eine Function von x ist, könne gleich geachtet werden.

§. 2. Keinesweges soll damit behauptet werden, dafs jedes y, es möge eine algebraische oder irgend eine transcendente Function des x seyn, als solche, durch dergleichen Form ganz genau könne dargestellt werden. Selbst auch bei der gewöhnlichen Form des binomischen Lehrsatzes (Vorer. V. §. 1.) die z. B. für die Einformung des $y^z = (x + \triangle x)^n$ ganz allgemein gebraucht wird, und nach welcher

$$(x+\triangle x)^n = x^n + n x^{n-1} \triangle x + \frac{n.\ n-1.}{1.\ 2} x^{n-2} \triangle x^2 + \ldots$$

sich ergibt, kann die Abgleichung ganz genau richtig nur für diejenigen Fälle seyn, da n eine ganze bejahte Zahl ist.

Eben daraus folgt, dafs auch $(x+\triangle x)^{-n}$

$$= \frac{n}{(x+\triangle n)^n} = \frac{1}{x^n + n x^{n-1} \triangle x + \frac{n.n-1.}{1.\ 2} x^{n-2} \triangle x^2 + \ldots}$$

ebenfalls ganz genau richtig seyn mufs, wenn $-n$ eine verneinte ganze Zahl ist, indem dann in dem hergesetzten Bruche der Nenner mit dem nten der

nachfolgenden Glieder genau beendigt wird. Gleichwohl wird eben dieses $(x+\Delta x)^{-n}$, der obigen ersten Binomialreihe unterworfen, eine unendliche Anzahl von Gliedern verlangen, die als solche nicht durchaus angewandt werden kann, und, irgendwo abgebrochen, die verlangte Function nur hinreichend genau anzugeben vermag, falls die Reihe convergent ist. Die transcendenten Functionen aber heifsen ja eben deshalb transcendent, weil es das Vermögen der Algebra überschreitet, sie ganz genau auszudrücken; und man daher zufrieden seyn mufs, wenn man sie durch eine algebraische unendliche, aber hinlänglich convergirende Reihe auszudrücken weifs, um die transcendente Gröfse hinreichend genau bestimmen zu können.

§. 3. Die obige Behauptung, dafs jedes y, welches eine Function von x ist, in dieser Hinsicht als ein $y = A + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \ldots$ auch für die Differenzen- und Differentialrechnung könne behandelt werden, soll daher nur verlangen, dafs man dieser Form eine jede Function von x, wenigstens durch Näherung genau genug unterwerfen könne, um auch für die Differenziirung und Differentialisirung behaupten zu können, dafs auch $\Delta y = \Delta . Bx^{\beta} + \Delta . Cx^{\gamma} + \Delta . Dx^{\delta} \ldots$ also auch der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = \frac{d . Bx^{\beta}}{dx} + \frac{d . Cx^{\gamma}}{dx} + \frac{d . Dx^{\delta}}{dx} + \ldots$ sey.

§. 4. Da es nun bei dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dy}$, und eben so auch bei dem zweiten $\frac{ddy}{dx^2}$, dem dritten $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. w. eingeführt ist, das dividirende dx allemal bejaht anzunehmen, auch dieses bejahte dx einen Zuwachs der absoluten Gröfse des x, also das

regelmäfsige Differential ausmacht: so ist es, obgleich nicht nothwendig, doch rathsam, auch für die allgemeine Form zu fordern, dafs jedes ihrer x die absolute Gröfse des x angebe, also falls man eigentlich z. B. ein $(-x)^{\beta}$ habe, sich dieses als $=(-1)^{\beta}.x^{\beta}$ zu denken, und nun den Factor $(-1)^{\beta}$, er mag bejaht oder verneint, oder auch unmöglich seyn, dem Coefficienten B einverleibt zu fordern.

§. 5. Bedenkt man, wie mancherlei Umformungsmethoden zuvörderst schon für die mancherlei algebraischen Functionen anzuwenden sind, um sie jener allgemeinen Form zu unterwerfen, und wie vielerlei Arbeit dazu gehört, um diejenigen transcendenten Functionen z. B. $y=\sin x$; $y=\log x$, welche man bereits in dieser Hinsicht gewältigt hat, ebenfalls dahin zu bringen: so sieht man ein, dafs die Richtigkeit jener Behauptung vermittelst der Induction erst am Ende der Wissenschaft könnte gewürdigt werden; der Anfänger also darüber inductiv gewifs nicht werden kann; und der Meister nicht eher, als bis er alle ihm möglich scheinende transcendenten Functionen in dieser Hinsicht umfassen zu können etwa glauben möchte!!

Alles aber was man von Vorne her für diese Behauptung sagen kann, ist folgendes. Da jene allgemeine Form für jede Addition, Subtraction, Multiplicirung, Dividirung und für die Potenzirung, dergestalt anstellig ist, dafs darunter auch jede Verbindung zwischen Potenzerhebung und Wurzelziehung begriffen wird: so würde wohl eine Function, welche dieser Form auch nur annähernd nicht einmal empfänglich wäre, überhaupt nicht geeignet seyn, unserm Calcul unterworfen zu werden.

Freilich ist es wohl um vieles deutlicher einleuch-

tend, dafs alles, was eine algebraische Gleichung als solche verlangen kann, auch durch algebraische Operationen angeblich seyn müsse; und die allgemeine Auflösung der Gleichungen hat man gleichwohl noch nicht zu finden vermocht!

§. 6. Indessen ist es in Hinsicht jener allgemeinen Form gar nicht nothwendig, dafs man eine Function, die man der Differenziirung unterwerfen will, im Voraus jener Form auch wirklich unterworfen habe: sondern wenn wir diese Unterwerfung als möglich voraussetzen: so ergiebt sich daraus die vortreffliche Lehre für das formvollständige genaue Differential dX, dafs man dieses darzustellen weifs, wenn man nur die Gröfsen der genauen Differentiale dX, ddX d^3X u. s. w. gefunden hat. Auf diese Weise werden wir nicht nur bei einzelen Functionen des x dahin gelangen, dafs wir von der vorausgesetzten Möglichkeit jener Form, durch ihre vorgefundene Wirklichkeit überführt werden; sondern es dürfte uns auch nachher gelingen, die Allgemeinheit jener Form bündig zu erweisen.

§. 7. *Lehrsatz.*

y sey irgend eine Function des x, welche es wolle;

wenn $y = A + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \ldots$ ist,

also $y + \Delta y = A + B(x+\Delta x)^\beta + C(x+\Delta x)^\gamma + D(x+\Delta x)^\delta + \ldots$ seyn mufs, indem Δy die durch Belegung des x mit Δx bewirkte Belegtheit der Function y bedeutet:

so ist $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{ddy}{2.dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^3y}{2.3.dx^3}\Delta x^3 + \frac{d^4y}{2.3.4dx^4}\Delta y^4 + \ldots$

B e w e i s.

§. 8. Da vermöge der ersten Binomialreihe, die Dignitäten β, γ, u. s. w. mögen seyn, was sie wollen, $B(x+\Delta x)^{\beta} = Bx^{\beta} + B\frac{\beta}{1}x^{\beta-1}\Delta x + B\frac{\beta.\beta-1.}{1.\ 2}x^{\beta-1}\Delta x^2 + \ldots$ ist,

also $\Delta.Bx^{\beta} = B\frac{\beta}{1}x^{\beta-1}\Delta x + B\frac{\beta.\beta-1.}{1.\ 2}x^{\beta-2}\Delta x^2 + \ldots\ldots$

eben so $\Delta.Cx^{\gamma} = C\frac{\gamma}{1}x^{\gamma-1}\Delta x + C\frac{\gamma.\gamma-1.}{1.\ 2}x^{\gamma-2}\Delta x^2 + \ldots$

auch $\Delta.Dx^{\delta} = D\frac{\delta}{1}x^{\delta-1}\Delta x + D\frac{\delta.\delta-1.}{1.\ 2}x^{\delta-2}\Delta x^2 + \ldots\ldots$

und s. w. seyn mufs,

so hat man

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{2dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^3y}{2.3dx^3}\Delta x^3 + \frac{d^4y}{2,3.4dx^4}\Delta x^4 + \ldots;$$

denn es mufs ja $\Delta y = \Delta.Bx^{\beta} + \Delta.Cx^{\gamma} + \Delta.Dx^{\delta} + \ldots$

also auch $dy = d.Bx^{\beta} + d.Cx^{\gamma} + d.Dx^{\delta} + \ldots$ seyn.

Das ist $\frac{dy}{dx} = B\beta x^{\beta-1} + C\gamma x^{\gamma-1} + D\delta x^{\delta-1} + \ldots$

$\frac{ddy}{dx^2} = B.\beta.\beta-1.x^{\beta-2} + C.\gamma.\gamma-1.x^{\gamma-2} + D.\delta.\delta-1x^{\delta-2} + \ldots$

$\frac{dddy}{dx^3} = B.\beta.\beta-1.\beta-2x^{\beta-3} + C\gamma.\gamma-1.\gamma-2.x^{\gamma-3} + D.\delta.\delta-1.\delta-2.x^{\delta-3} + \ldots$

und s. w.

Z u s a t z 1.

§. 9. Aus den Ausdrücken des $\frac{dy}{dx}$, des $\frac{ddy}{dx^2}$ u. s. w. im Beweise liegt vor Augen, dafs darunter die von uns schlechthin so genannten ersten, zweiten etc. Differentialquotienten zu verstehen sind, welche nur noch die Gröfsen der genauen Differentialquotienten allemal angeben, nicht etwa auch formenvollständig sind.

Zusatz 2.

§. 10. Da das $\triangle x$ im Lehrsatze jede noch so grofse oder noch so kleine Gröfse haben kann, nur dafs es als additiv zum x, dieser Gröfse selbst gleichartig, und so oft es in der Reihe vorkommt, immerfort sich selbst gleichbleibend seyn mufs: so kann man für $\triangle x$ auch das immerfort kleiner werdende Differential $'dx$ gewählt verlangen, doch nur das constante (III. §. 27.) wie es die Ausdrücke des zweiten und dritten Differentialquotienten darlegen.

So lange nun dieses für $\triangle x$ gewählte Differential noch ein $'dx$ seyn, noch in seinem dem $=o$ sich immerfort nähernden Gröfsen gedacht werden soll; so hat man auch statt $\triangle y$ noch das werdende Differential $'dy$

$$\text{also } 'dy = \frac{dy}{dx}'dx + \frac{d^2y}{2\,dx^2}'dx^2 + \frac{d^3y}{2.3.dx^3}'dx^3 + \ldots$$

Zusatz 3.

§. 11. Erst dann, wenn auch $'dx$ zu $=dx=o$ geworden seyn soll,

$$\text{hat man } dy = dy + \frac{d^2y}{2} + \frac{d^3y}{2.3} + \frac{d^4y}{2.3.4} + \ldots$$

wo nun das dy der linken Seite das formenvollständige genaue Differential der Function y, das dy der rechten Seite nur die Gröfse desselben, und eben so d^2y, d^3y ... das zweite und dritte schlechthin so genannte Differential der Function, also dessen Gröfse bedeutet.

§. 12. *Beispiele.*

1. Sey $y=x^3$, so ist $dy=3x^2\,dx$; $ddy=6xdx^2$ $d^3y=6.dx^3$; $d^4y=o$

also $d.x^3 = 3x^2\,dx + 3x\,dx^2 + dx^3$, wie wir es oben aus $\Delta.x^3 = 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3$ gefunden haben.

2. Sey $y = (-x)^3$, so ist $dy = 3(-x)^2.-dx = -3(-x)^2.dx$; $ddy = -6.(-x).dx.-dx = 6(-x)dx^2$ und $d^3y = 6.dx^2.-dx = -6.dx^3$;

also $d.(-x)^3 = -3(-x)^2\,dx + 3.(-x)\,dx^2 - dx^3$

auch $= -3x^2\,dx - 3x\,dx^2 - dx^3$, wie es aus $\Delta.(-x)^3 = -3x^2\,\Delta x - 3x\,\Delta x^2 - \Delta x^3$, als der regelmäfsigen Differenz, welche $= [-(x+\Delta x)]^3 - (-x)^3 = (-x-\Delta x)^3 - (-x)^3$ seyn mufs, ebenfalls sich ergeben müfste.

3. Sey $y = x^n$, so

ist $dy = n\,x^{n-1}\,dx$; $ddy = n.n-1.x^{n-2}\,dx$;

$$d^3y = n.n-1.n-2.x^{n-3}\,dx;$$

also $$dx^n = nx^{n-1}dx + \frac{n.n-1}{1.2}\,x^{n-2}\,dx^2$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}\,x^{n-3}\,dx^3 + \ldots,$$

wie wir ebenfalls oben (VI. §. 1.) aus der allgemeinen Differenz $\Delta.x^n$ es gefunden haben.

Zusatz 4.

§. 12. Ueberhaupt kann man aus

$$dy = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \frac{d^3y}{1.2.3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4} + \ldots$$

als $$= p\,dx + \frac{q.dz^2}{1.2} + \frac{r.dx^3}{1.2.3} + \frac{s.dx^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

auf $$\Delta y = p.\Delta x + \frac{q.\Delta x^2}{2.2} + \frac{r.\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{s.\Delta x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

schliefsen, also auf diese Weise die allgemeine Differenz einer jeden Function y finden, sobald man die Function *anhaltend* auf x zu differenziiren, das heifst, nach ihrem gefundenen ersten Differentiale $dy = pdx$, auch ihr zweites $d^2y = q\,dx^2$, auch ihr drit-

tes $d^3y = r\,dx^3$ und s. w., oder mit andern Worten, nach ihrem aufgefundenen ersten Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = p$, auch ihren zweiten $\frac{ddy}{dx^2} = q$, und s. w. zu finden weifs; und nun wird es bei den allermeisten Functionen, insbesondere aber bei den transcendenten der Fall seyn, dafs auf diese Weise ihre allgemeine Differenz ungemein vielleichter gefunden wird, als wenn man ihr x sogleich mit Δx belegen, und vermittelst der gemeinen Analyse verfahren wollte.

§. 13. *Beispiele.*

4. Sey $y = \sin z$, nämlich $= \sin \text{arc}\, z$, so weifs man (IX. §. 10.), dafs $dy = \cos z\,dz$; $ddy = -\sin z\,dz^2$; $d^3y = -\cos z\,dz^3$; $d^4y = \frac{\sin z}{1.2.3.4}$

also $d.\sin z = \frac{\cos z}{1}dz - \frac{\sin z}{1.2}dz^2 - \frac{\cos z}{1.2.3}dz^3 + \frac{\sin z}{1.2.3.4}dz^4 + \ldots$

auch $\Delta.\sin z = \frac{\cos z}{1}\Delta z - \frac{\sin z}{1.2}\Delta z^2 - \frac{\cos z}{1.2.3}\Delta z^3 + \frac{\sin z}{1.2.3.4}\Delta z^4 + \ldots$

5. Sey $y = \log x$, so wissen wir aus IX. §. 3., dafs $dy = \frac{dx}{x}$; $d^2y = -\frac{dx^2}{x^2}$; $d^3y = 2\frac{dx^3}{x^3}$; $d^4y = 2.3.\frac{dx^4}{x^4}$; und s. w.

also $d\log x = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \frac{dx^4}{4x^4} \ldots$

auch $\Delta\log x = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} + \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \frac{\Delta x^4}{4x^4} \ldots$

6. Sey $y = \log \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$, so wissen wir daſs $dy = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$ ist, folglich $ddy = \frac{2x-5x^4}{\sqrt{(x^2-x^5)^3}}.dx$

also $dy = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}} + \frac{2x-5x^4}{2.\sqrt{(x^2-x^5)^3}}.dx - \ldots$ ist;

und auch aus diesem dy kann man sogleich auf $\triangle y$, wie allemal schlieſsen, weil ja im formenvollständigen Differential jedes seiner dx, obgleich es schon $= o$ geworden seyn soll, doch noch geschrieben da steht. Mag immerhin die Auffindung der folgenden Glieder für diese Function sehr mühsam seyn; wie ungleich mühsamer müſste nicht sogleich die Arbeit ausfallen, wenn man sie durch endliche Differenziirung unmittelbar für ein allgemeines $\triangle x$ finden wollte!

Anmerkung.

§. 14. Da aber bei allen unseren Differenziirungsregeln, das regelmäſsige Urdifferential dx, als eine Belegung der absoluten Gröſse des x vorausgesetzt wird, also die $dy = pdx$; $ddy = ydx^2$ u. s. w. dieser Voraussetzung gemäſs gefunden werden; so muſs nun auch aus unserm

obigen $dy = dy + \frac{d^2y}{2} + \frac{d^3y}{2.3} + \frac{d^4y}{2.3.4} \ldots$

$= pdx + \frac{q\,dx^2}{2} + \frac{r\,dx^2}{2.3} + \frac{s\,dx^4}{2.3.4} \ldots$ allemal

ein $\triangle.y = p\triangle x + \frac{q\triangle x^2}{2} + \frac{r.\triangle x^3}{2.3} + \frac{s.\triangle x^4}{2.3.4} \ldots$ sich ergeben, welches ebenfalls die regelmäſsige Belegung seines x voraussetzt, nämlich die absolute Gröſse des x mit einem Zuwachse $\triangle x$, also jedes $+x$ mit einem $+\triangle x$, jedes $-x$ mit einem $-\triangle x$ belegt fordert.

Z u s a t z 5.

§. 15. Dagegen mufs nun

$$\mathfrak{d}y = -dy + \frac{d^2y}{2} - \frac{d^3y}{2.3} + \frac{d^4y}{2.3.4} - \ldots$$

$$= -pdx + \frac{q\,dx^2}{2} - \frac{r.dx^3}{2.3} + \frac{s.dx^4}{2.3.4} - \ldots$$

also auch $\mathfrak{D}y = -p\triangle x + \frac{q\,dx^2}{2} - \frac{r.\triangle x^3}{2.3} + \frac{s.\triangle x^4}{2.3.4} - \ldots$

sich ergeben, wenn $\mathfrak{d}$ das formenvollständige Differentiale, und $\mathfrak{D}$ die Differenz der Function bedeutet, welche ihr x mit dem gegenseitigen Urdifferential, und der gegenseitigen Urdifferenz belegt fordern. Denn da diese gegenseitige Belegung die Gegengröfse der vorigen regelmäfsigen ausmacht, so hat man nur, wo ungerade Potenzen des dx vorkommen, das Gliederzeichen umzukehren.

A n m e r k u n g.

§. 16. Indem man nun

$$dy = pdx + \frac{q}{2}dx^2 + \frac{r}{2.3}dx^3 + \frac{5}{2.3.4}dx^4 + \ldots$$

und dagegen

$$\mathfrak{d}y = -pdx + \frac{q}{2}dx^2 - \frac{r}{2.3}dx^3 - \frac{s}{2.3.4}dx^4 - \ldots$$

befolgt, so mufs in beiden Fällen die absolute Gröfse der p, q, r ... durch die ganz gewöhnlichen Differenziirungsregeln gefunden werden, welche dx als Zuwachs der absoluten Gröfse des x voraussetzen. Daher man nun auch die endlichen Differenzen

$$\triangle y = \frac{dy}{dx}\cdot\triangle x + \frac{ddy}{2\,dx^2}\triangle x^2 + \frac{d^3y}{2.3.dx^2}\triangle x^3 +$$

und $\mathfrak{D}y = -\frac{dy}{dx}\cdot\triangle x + \frac{ddy}{2\,dx^2}\triangle x^2 - \frac{d^3y}{2.3.dx^2}\triangle x^3 +$

nicht nur durch die gewöhnlichen Differenziirungsregeln findet, sondern auch die schon oben erwähnte

Regel stehen bleibt, dafs in allen Differentialquotienten das dividirende Urdifferential von absoluter, also auch bejahter Gröfse angenommen wird.

Zusatz 6.

§. 17. Heifse nun $y^{(+\Delta x)}$, was aus y wird, wenn $x+\Delta x$ statt der absoluten Gröfse seines x geschrieben ist, und dagegen $y^{(-\Delta x)}$ was aus y wird, wenn $x-\Delta x$ statt der absoluten Gröfse seines x gesetzt ist: so hat man auch

$$y^{(\mp\Delta x)} = y \mp \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{1.2dx^2}\Delta x^2 \mp \frac{d^3y}{1.2\,3.dx^3}\Delta x^3 + \mp\ldots$$

welches der berühmte Taylorsche Satz ist.

Anmerkungen.

§. 18. Allerdings kann man sagen, dafs er schon im Lehrsatze §. 6. so gut als aufgeführt, folglich dort schon erwiesen sey. Indessen sind nicht nur die Zusätze, welche wir nachher aufgeführt haben (an sich wissenswürdig und practisch nützlich) bisweilen bequemer zu gebrauchen: sondern wir sind auch nun gesichert, diesen Satz in Hinsicht seines $\mp$ durchaus richtig zu verstehen. Dagegen würde man nach dem gewöhnlichen Vortrage der Differenziirungsregeln und des Taylorschen Satzes gar wohl veranlafst bleiben, zu behaupten, dafs man z. B.

für $y = (-x)^3$ das $y^{+\Delta x} = (-x+\Delta x)^3$

als $y^{+\Delta x} = y + \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{1.2.dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3}\Delta x^3$

finden müsse, welches

aber $= (-x)^3 - 3x^2\Delta x - 3x\Delta x^3 - \Delta x^3$ sehr unrichtig

statt $(-x)^{(-\Delta x)^3} = (-x)^3 + 3x^2\Delta x - 3x\Delta x^3 + \Delta x^3$ angeben würde!

§. 19. Im folgenden Capitel werde ich Taylors Reihe unbedingt, ohne eine allgemeine Form der y vorausgesetzt zu haben, erweisen; daher dann eben so unbedingt auch erwiesen seyn wird, dafs

jedes $\Delta y = p\Delta x + \frac{q.\Delta x^2}{2} + \frac{r\Delta x^3}{2.3} + \frac{5\Delta x^4}{2.3.4} \ldots$ also jedes y, dessen Differentialquotienten p, q; r ..., wir zu finden wissen, der Reihenform $p\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + S\Delta x^4 \ldots$ unterwerfbar ist; indem wir sogar wissen, dafs man eine dieser Reihen wirklich hat, wenn man $Q = \frac{q}{2}$; $R = \frac{r}{2.3}$; $S = \frac{s}{2.3.4}$ setzt.

Eben so unbedingt ist uns hiemit, und eigentlich schon durch noch leichtere Schlüsse, auch die Allgemeinheit

des $dy = pdx + Qdx^2 + Rdx^3 \ldots$ also auch des $dy = pdx + o$ erwiesen; und an dieser Allgemeinheit wird uns bei den allermeisten Absichten des Differential- und Integral-Calculs ungleich mehr als an der allgemeinen Form des y selbst gelegen seyn!

§. 20. Eine ungemeine Erweiterung wird diesen unbedingt erwiesenen Formen dadurch zu Theil, dafs eben so gewifs auch

jedes $dy = pdX + \frac{q}{2}dX^2 + \frac{r}{2.3}dX^3 + \ldots$

seyn mufs, wenn wir

$p = \frac{dy}{dX}$, $q = \frac{ddy}{dX^2}$ u. s. w. gefunden, nämlich y auf x noch nicht, sondern nur auf X, irgend eine andere Function des x, differenziiren konnten oder wollten.

§. 21. Aus dem unbedingt erwiesenen $\Delta y = p\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 \ldots$ (§. 19.) würde sich

nun bündig darthun lassen, dafs jedes y welches man auf x zu differenziiren weifs, sogar als ein $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ könne dargestellt, nämlich dieser Form könne unterworfen werden, welche nun nach ganzen bejahten Potenzen des x (oder wenn man auf X differentiirt hat, nach solchen Potenzen des X) fortgeht. Indessen will ich keinen Raum darauf verwenden; weil alles was wir aus solcher schon als gewifs vorhandenen Form herleiten können, durch den hypothetischen Gebrauch derselben ebenfalls befriedigend gefunden und erwiesen wird. Und dieses Verfahren schon bei Functionen einer einzigen urbelegten Grundgröfse kennen zu lernen, halte ich für sehr rathsam; weil wir bei Functionen von zwei, drei und mehren urbelegten Grundgröfsen x, u, z, ... nur äufserst mühseelige Fortschritte machen würden, wenn wir solche hypothetische Folgerungen vermeiden wollten. Es ist genug, wenn durch die gefundene Wirklichkeit die Hypothese bestätigt wird.

§. 22. *Die Aufgabe:*

Eine Function des x, vermittelst ihrer Differentialquotienten in eine Reihe aufzulösen, ist sehr wichtig, und besonders, wenn man sogleich eine durch Convergenz brauchbare und vorzüglich brauchbare Reihe zu liefern verlangt, bei vielen Functionen so schwierig, dafs ich im Nachtrage ein System von Lehrsätzen mit neuen Hülfsmitteln dafür aufzustellen versuchen werde. Hier halte ich für nützlich und neu belehrend, zu zeigen, auf welche Weise das in §. 19. erwiesene

$$\Delta y = p\Delta x + \frac{q\Delta x^2}{2} + \frac{r\Delta x^3}{2.3} + \frac{s\Delta x^4}{2.3.4} + \ldots$$

hinreichend ist, um z. B. folgende drei Reihen zu finden.

I. $\sin z = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{6.4.5} - \frac{z^7}{120.6.7} + \frac{z^9}{5040.8.9} - \ldots$

II. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{24.5.6} + \frac{z^8}{720.7.8} - \ldots$

III. $\sin vers\, z = 0 + \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^6}{24.5.6} - \frac{z^8}{720.7.8} - \ldots$

indem z die Länge eines Bogens mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben, und $\sin z$ die Länge seines Sinus, $\cos z$ die Länge seines Cosinus u. s. w. bedeutet.

Auflösung für I.

§. 23. Wenn man das obige $y = \sin z$, also das obige $x = z$ bedeuten läßt, so hat man (IX. §. 20.)

$$p = \frac{d \sin z}{dz} = \cos z\,; q = \frac{dd \sin z}{dz^2} = -\sin z\,;$$

$$r = \frac{d^3 \sin z}{dz^3} = -\cos x\,; s = \frac{d^4 \sin z}{dz^4} = \sin x$$

Da nun das obige $\triangle x$, hier $= \triangle z$, einen beliebigen Zusatz zur Bogenlänge z bedeutet: so hat man

$$\sin(z + \triangle z) = \sin z + \triangle z . \cos z - \triangle z^2 . \frac{\sin z}{2} - \triangle z^3 . \frac{\cos z}{2.}$$

$$+ \triangle z^4 . \frac{\sin z}{6.4} + \triangle z^5 . \frac{\cos z}{24.6} - \ldots$$

Da z eine beliebig veränderliche Länge des Bogens bedeutet, so kann auch $z = 0$ seyn, wofür auch $\sin z = 0$ und $\cos z = 1$ wird, folglich

$$\sin \triangle z = \triangle z - \frac{\triangle z^3}{2.3} + \frac{\triangle z^5}{6.4.5} - \frac{\triangle z^7}{120.6.7} + \ldots$$

Da nun $\triangle z$, (als ein Zusatz zum Bogen z, der in dem Endpuncte des z seinen Anfang nimmt) indem $z = 0$ gesetzt ist, mit z einerlei Anfangspunct hat, auch einen Zusatz von beliebig wählbarer Größe ausmacht: so ist hiemit dieselbe Reihe für jede Größe erwiesen, die man dem veränderlichen z beigelegt denken will.

§. 24. *Auflösung für II.*

ergibt sich eben so; wenn man $y = \cos z$ setzt, und aus IX, §. 20. benutzt, daſs nun $p = \frac{d.\cos z}{dz} = -\sin z$;
$q = \frac{dd\cos z}{dz^2} = -\cos z$; $r = \frac{d^3\cos z}{dz^3} = \sin z$;
$s = \frac{^4d\cos z}{dz^4} = \cos z$ ist, u. s. w.

§. 25. *Die IIIte Reihe*

folgt sogleich aus der IIten, weil $\sin vers\, z = 1 - \cos z$, die einzig richtige, aber auch für alles $\pm$ durchaus richtige Definition des sinus versus ist.

Sechszehntes Capitel.

Bedingter und unbedingter Beweis für Taylors Reihe.

§. 1. Wenn jedes y, welches eine Function von x ist, eben deshalb

auch $= A + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \ldots$, dieser Reihenform nämlich allemal unterwerfbar ist: so mufs, wie wir es im vorigen Cap. XV. §. 8. bereits erwiesen sehen, allemal

$$\triangle y = \frac{dy}{dx}\triangle x + \frac{ddy}{2.dx^2}\triangle x^2 + \frac{d^3y}{2.3.dx^3}\triangle x^3 + \frac{d^4y}{2.3.4\,dx^4}\triangle x^4 + \ldots$$

folglich auch

$$\nabla x = -\frac{dy}{dx}\triangle x + \frac{d^2y}{2.dx^2}\triangle x^2 - \frac{d^3y}{2.3.dx^3}\triangle x^3 + \frac{d^4y}{2.3.4\,dx^4}\triangle x^4 + \ldots$$

seyn, indem $\triangle y$ die regelmäfsige, und ∇y die gegenseitige Differenz bedeutet, das dividirende dx aber allemal absolut, also bejaht angenommen, gefordert wird. (XV, §. 4.)

Zusatz.

§. 2. Wenn daher

$\overset{(\triangle x)}{y} = y + \triangle y$ und $\overset{(-\triangle x)}{y} = y + \nabla y$ bedeutet: so hat man auch

$$\overset{(\triangle x)}{y} = y + \frac{dy}{dx}\triangle x + \frac{d^2y}{2\,dx^2}\triangle x^2 + \frac{d^3y}{2.3.dx^3}\triangle x^3 + \ldots$$

und

$$\overset{(-\triangle x)}{y} = y - \frac{dy}{dx}\triangle x + \frac{d^2y}{2.dx^2}\triangle x - \frac{d^3y}{2\,3\,dx^3}\triangle x^3 + - \ldots$$

welches die berühmte Taylorsche Reihe ist.

§. 3. Für diese wichtige Reihe, noch einen andern von der obigen ausbedungenen allgemeinen Reihenform unabhängigen Beweis hinzuzufügen, wird um so rathsamer seyn, da wir dazu Lehren, die allgemeinen Differenzen betreffend, benutzen können, welche überdies auch an und für sich sehr wissenswürdig sind.

§. 4. Sey y eine Function des x, und $y^{(1.\Delta x)}$ bedeute, was sie gibt, wenn man die absolute Gröfse ihres x mit dem Zusatze $1.\Delta x$ belegt hat: so hat man $y^{(1.\Delta x)} = y + \Delta y$, wenn Δy die Belegung bedeutet, welche für die Gröfsen des y eben dadurch bewirkt wird, dafs statt jedes ihrer x das belegte $x + 1.\Delta x$ gesetzt ist.

§. 5. Heifse nun ferner $y^{(2.\Delta x)}$, was aus dem bereits gefundenen $y^{(1.\Delta x)} = y + \Delta y$ wird, wenn wir jedem seiner x, in jedem der beiden Theile y und Δy, abermals den Zusatz Δx hinzufügen, und heifse dann $\Delta\Delta y$ die Belegung, welche dem Δy dadurch zukommt; so haben wir

$$y^{(2\Delta x)} = y + \Delta y + \Delta y + \Delta\Delta y = y + 2\Delta y + \Delta\Delta y.$$

Auch wird, was wir auf diese Weise durch zweimalige auf einander folgende Belegung des x mit $1.\Delta y$ erhalten, offenbar einerlei mit dem seyn müssen, was wir durch einmalige Belegung mit $2.\Delta x$ aus eben der Function y erhalten würden.

§. 6. Indem wir auch in dem schon aufgefundenen $y^{(2.\Delta x)}$ jedes seiner x aufs neue mit Δx belegen, und was dadurch aus $\Delta\Delta y$ wird, durch $\Delta\Delta y + \Delta\Delta\Delta y$ bezeichnen: so müssen wir

$$y^{(3.\Delta x)} = y + 2\Delta y + \Delta\Delta y + \Delta y + 2\Delta\Delta y + \Delta\Delta\Delta y$$

$$y^{(3.\Delta x)} = y + 3\Delta y + 3\Delta\Delta y + \Delta\Delta\Delta y$$

d. i. erhalten; und dieses ist zugleich auch eben dasjenige, was wir aus y mit einem Male erhalten würden, wenn wir jedes seiner x sogleich mit $3.\Delta x$ belegen wollten.

Lehrsatz.

§. 7. Wenn $y^{(n.\Delta x)}$ bedeutet, was aus y wird, indem man statt jedes seiner x das belegte $x+n\Delta x$ setzt: so hat man

$$y^{(n.\Delta x)} = y + n\Delta y + \frac{n.n-1.}{1.2}\Delta^2 y + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}\Delta^3 y + \frac{n.n-1.\ldots.n-(r-1).}{1.2.\ldots.r}\Delta^4 y + \ldots$$

Beweis.

§. 8. Wenn für einen gewissen Werth des n, welcher m heifsen mag, der Lehrsatz richtig ist, so mufs er auch für $n = m+1$ es seyn. Denn für

$$y^{(m\Delta x)} = y + m\Delta y \ldots + \frac{m.m-1.\ldots.m-(r-1).}{1.2.\ldots.r}\Delta^r y + \ldots$$

mufs die Belegung

$$1.\Delta y \ldots + \frac{m.m-1.\ldots.m-(r-2).}{1.2\ldots r-1}.\Delta^r y + \ldots \text{ also}$$

$$y^{(m+1)\Delta x} = y + \frac{m+1}{1}\Delta y \ldots + \frac{.m+1.m\ldots m-(r-1).}{1.2.\ldots.r}\Delta^r y \ldots$$

sich ergeben, wenn im $y^{(m\Delta x)}$ statt eines jeden seiner $x+m\Delta x$ das $x+(m+1)\Delta x$ gesetzt, also dadurch sein y um $1.\Delta y$, sein $m\Delta y$ um $m.\Delta\Delta y$ u.s.w., sein allgemeines rtes Glied daher um das ihm untergesetzte verändert wird.

Da nun der Lehrsatz für $m = 3$ nicht nur, nach §. 5., sondern auch für $m = 3$, nach §. 6. schon richtig ist, indem man ja das dort gefundene $y^{(3.\Delta x)}$ auch $= y + \frac{3}{1}\Delta y + \frac{3.3-1.}{1.\ 2}\Delta^2 y + \frac{3.3-1.3-2.}{1.\ 2.\ 3}\Delta^3 y + o$ schreiben kann, so ist durch eine fernere erste Anwendung des Beweises, der Lehrsatz auch für $n = m + 1 = 3 + 1 = 4$ erwiesen; durch eine darauf folgende zweite Anwendung auch für $n = 4 + 1 = 5$, und s. w., dafs also n auf jede beliebige ganze Zahl schon durch diesen Beweis steigen kann.

Zusatz.

Aber es kann auch n jeden beliebigen bejahten Bruch bedeuten. Denn da Δx jeden Werth haben kann, so kann man ihn auch $\frac{\Delta x}{r}$ schreiben, wodurch man in dem obigen Lehrsatze statt $n.\Delta x$ erhält $\frac{n\Delta x}{r}$, welches auch $= \frac{n}{r}.\Delta x$ ist.

Zusatz 2.

§. 9. Da Δx im Lehrsatze jeden beliebig angenommenen Zusatz zum x bedeuten kann, so kann man ihn auch $= dx$ annehmen, wobei denn auch die mit $dx = o$ ebenfalls und sämmtlich zu $= o$ werdenden Belegungen des y, des Δy, des $\Delta\Delta y$ u. s. w. durch dy, ddy, dddy u. s. w. geschrieben werden: dafs also der hieher gehörige Lehrsatz

$$y^{(ndx)} = y + ndy + \frac{n.\ n-1.}{1.\ 2}d^2y + \frac{n.\ n-1.n-2.}{1.\ 2.\ 3}d^3y + \ldots$$

lediglich einen, für jeden jedesmaligen Werth des im-

merfort kleiner werdenden dx benutzte, einzelne Anwendung des obigen allgemein bewiesenen $y = \frac{n\Delta x}{}$ ausmacht.

Anmerkung.

§. 10. So fest ich darauf halte, dafs bei jedem genauen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ sein dx, und eben deshalb auch sein dy allemal als eine aufs völligste zu $= 0$ schon gewordene Gröfse gedacht werden mufs, und eben so auch jeder höhere Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2}$, oder $\frac{d^3y}{dx^3}$ und s. w., der ja auch nichts anders als ein erster Differentialquotient der neueren Function $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{ddy}{dx^2}$ und s. w. ist, allemal ein $= \frac{0}{0}$ im strengsten Sinne ausmacht, (dessen ungeachtet aber, wie es bereits erwiesen ist, bald ein $= 0$ bald ein $= \infty$, bald auch, und meistens, eine zwischen 0 und ∞ fallende Gröfse als seinen Werth bestimmen kann); so halte ich es gleichwohl für schicklich und rathsam in einer Reihe, wie der vorigen für $y = (ndx)$, sich unter ihren vorläufig einzeln da stehenden dy, ddy u. s. w., noch solche Gröfse zu denken, die einem dem Verschwinden sich annoch nähernden dx zugehörig, selbst auch in ihrer Annäherung an ihr Nichts noch begriffen sind; besonders aber wo es dem Vorhaben gemäfs ist, die Form des noch werdenden Differentials vor Augen zu behalten.

Uebergang zu Taylors Satz.

§. 11. So lange in der Reihe

$$y^{(ndx)} = y + \frac{n}{y}dy + \frac{n.n-1.}{1.2}d^2y + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}d^3y + \ldots$$

n irgend eine bestimmte Zahl ist, möchte sie auch noch so grofs bestimmt seyn, so mufs, indem dx zu $=0$ wird, auch ndx, auch ndy, auch $\frac{n.n-1.}{1.2}ddy \ldots$ jedes zu $=0$ werden; auch jedes $=0$ geworden seyn, sobald $dx=0$ geworden ist.

Wenn wir aber unter α eine, dem x, also auch dem noch im Verschwinden begriffenen dx gleichartige, doch unveränderliche Gröfse, und unter n, welches nach Zusatz 1. auch jeden bejahten Bruch bedeuten kann, den veränderlichen Exponenten des immerfort wachsenden Verhältnisses $\frac{\alpha}{dx}$ verstehen: so ist dann n eine solche Zahl, die in eben dem Verhältnisse wächst, in welchem dx abnimmt, dergestalt, dafs $n=\frac{\alpha}{dx}$ ins Unendliche wachsend, ein $n=\infty$ werdend ist, indem dx bis auf $=0$ abnimmt, und dabei immerfort $ndx=\alpha$ bleibt, auch, wenn $dx=0$ wirklich geworden, und demnach $n=\infty$ ein vollendetes Vollgrofses wirklich geworden ist, ebenfalls $ndx=\alpha$ geblieben seyn mufs.

Da nun, indem $n=\frac{\alpha}{dx}$ ist, $n-1=\frac{\alpha}{dx}-1$ $=\frac{\alpha-dx}{dx}$ immerfort bleibend ist; so mufs mit $dx=0$, auf das völligste $n-1=\frac{\alpha}{dx}$ geworden seyn; eben so

auch $n-2=\frac{\alpha}{dx}-2=\frac{\alpha-2dx}{dx}=\frac{\alpha}{dx}$

auch $n-3=\frac{\alpha}{dx}-3=\frac{\alpha-3dx}{dx}=\frac{\alpha}{dx}$

und überhaupt $n-r = \frac{\alpha}{dx} - r = \frac{\alpha - r\,dx}{dx} = \frac{\alpha}{dx}$ mit $dx = 0$ geworden seyn. Nicht nur so lange r irgend eine noch so grofse, aber doch angebliche Zahl in der wachsenden Zahlenreihe 1, 2, 3 u. s. w. bedeutet: sondern auch wenn auf diese Weise ein $r = \infty$ gedacht werden könnte, so würde mit $dx = 0$ immer noch $r.dx = \infty.0$ bleibend seyn müssen; weil ja zwischen dem wachsenden r und dem abnehmenden dx hier kein solches Gesetz einer gegenseitigen Vergröfserung und Verminderung vorhanden ist, durch welches allein nur für $\infty.0$ ein endlicher Werth bestimmt werden könnte. (Vorerinner. IX.)

§. 12. Daher nun

$$\overset{(\alpha)}{y} = y + \alpha\frac{dy}{dy} + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots;$$

welches die Taylorsche Reihe ist, deren nachfolgende Glieder (das heifst, die Glieder aufser dem vorangehenden y) den Zusatz Δy zum y im $\overset{(\alpha)}{y} = y + \Delta y$ vermittelst des ersten, zweiten u. s. w. Differentialquotienten und des gegebnen α ausdrücken, und daher sämmtlich können gefunden werden, wenn man diese Quotienten zu finden weifs.

§. 13. Da nun die regelmäfsige Auffindung der Differentialien dy, ddy, und s. w. erfordert, dafs jedes schlechthin geschriebne dx, also auch jedes $+dx$ einen Zusatz, und daher $-dx$, als dessen Gegengröfse, einen Abzug für die absolute Gröfse des x ausmacht: so mufs auch das α in der eben gefundenen Reihe einen Zusatz zur absoluten Gröfse des x ausmachen, und daher in der für ein gefordertes $-\alpha$ aus der vorigen sich folgernden Reihe

$$\overset{(-\alpha)}{y} = y - \alpha\frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\alpha^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + -$$

das hier verlangte $-\alpha$ einen Abzug von der absoluten Gröfse des x bedeuten. Diese Bedeutung des $+$ und $-$ wird nun auch bei allem Gebrauche dieser Reihen um so mehr im Klaren bleiben, je gewisser wir bereits festgesetzt haben, dafs jedes in dem Differentialquotienten als Divisor vorkommende dx ebenfalls das regelmäfsige absolute Differential dx seyn soll; eben dieses also auch bei der Bedeutung des $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ ... vorausgesetzt werden mufs, und daher die Taylorsche Reihe vermittelst derselben als $\overset{(\mp\alpha)}{y} = y \mp p\alpha + q\frac{\alpha^2}{2} \mp r\frac{\alpha^3}{2.3} + \mp$ geschrieben, in Hinsicht ihres $+$ und $-$ niemals trügen kann.

§. 13. Allerdings aber mufs man, um z. B. $(-x-\alpha)^2$ vermittelst dieser Reihe zu finden, es bedenken, dafs $-x$ mit $-\alpha$ belegt für die absolute Gröfse des x die Belegung $+\alpha$ ausmacht, und $-x-\alpha = -1(x+\alpha)$ ist, also hier $y = (-x)^2$ gesetzt, durch $\overset{(+\alpha)}{y} = y + p\alpha + q\frac{\alpha^2}{2} + \ldots\ldots$ das verlangte $(-x-\alpha)^2$ als $= (-1)^2.(x+\alpha)^2 = 1.(x+\alpha)^2$ richtig gefunden wird. Man sehe auch andere Beispiele oben XV. §. 13. behandelt.

§. 14. Da $\mp\alpha$, als Belegung des x der absoluten Gröfse des x subtractiv oder additiv seyn soll; so mufs es eine dieser x gleichartige Gröfse seyn, und kann daher sehr bequem und lehrreich als ein $\mp\triangle x$ aufgeführt werden, wodurch wir nun Taylors Reihe als $\overset{(\mp\triangle x)}{y} = y \mp \frac{dy}{dx}\triangle x + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\triangle x^2}{2} \mp \frac{d^3y}{dx^3}\frac{\triangle x^3}{2.3} + \mp$ wiederum vor Augen haben.

§. 15. Da ihr $\triangle x$ so grofs und so klein genommen seyn kann, als man will, so kann es auch im-

merfort die jedesmalige Gröfse des immerfort kleiner werdenden Differentiales dx bedeuten, wodurch wir also auch

$$y^{(\mp dx)} = y \mp dy + \frac{d^2y}{2} \mp \frac{d^3y}{2.3} + \frac{d^4y}{2.3.4} \mp + \text{ erhalten,}$$

und daraus nicht nur das werdende regelmäfsige Differential $'dy = dy + \frac{ddy}{2} + \frac{d^3y}{2.3} + \frac{d^4y}{2.3.4} + -$ wie oben in XVI. §. 11., sondern auch das werdende gegenseitige Differential

$$'by = -dy + \frac{d^2y}{2} - \frac{d^3y}{2.3} + \frac{d^4y}{2.3.4} - +$$

herleiten können.

§. 16. Mit Hülfe des hier nachfolgenden Lehrsatzes ergiebt sich auch bündig hieraus, dafs das genaue regelmäfsige und das genaue gegenseitige Differential einander entgegengesetzt bezeichnet sind, das letztere eine ± 0 nämlich eine niedrigste oder höchste Gränze bejahter oder verneinter Gröfsen seyn mufs, wenn das erstere eine ∓ 0 also eine höchste oder niedrigste Gränze verneinter oder bejahter Gröfsen ist. (Vorerin. IX.)

§. 17. So lange man in dem abstracten Calcul bleibt, scheinen die regelmäfsigen Differentiale zu genügen, zum Theil auch deshalb, weil man das System des Aufzufindenden jenen eingeschränkten Voraussetzungen gemäfs sich gebildet hätte. Dieses war der Fall für die gewöhnliche Lehre des Gröfsten und Kleinsten, wofür ich viel neues dazu gehöriges durch Mithülfe der gegenseitigen Differentialien aufgefunden habe.*). In diesem Lehrbuche aber ist es nöthig, mit

*) Neue Methode des Gröfsten und Kleinsten. Freiberg 1808.

der gewöhnlichen Methode bekannt zu machen, wobei denn namentlich auch die Taylorsche Reihe gute Dienste leistet, wenn man den folgenden Lehrsatz bündig erwiesen hat.

Lehrsatz.

§. 18. In Taylors Reihe

$$y^{(\mp\alpha)} = y \mp \frac{dy}{1.dx}\alpha + \frac{d^2y}{1.2.dx^2}\alpha^2 \mp \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3}\alpha^3 + \mp \text{ etc.}$$

kann α so klein angenommen werden, daſs jedes einzele Glied derselben, dessen Differentialquotient nicht $= o$ ist, die Summe aus allen ihren nachfolgenden Glieder an absoluter Gröſse übertreffend, folglich die Summe aus jenem einzelen und allen ihm nachfolgenden Gliedern, eine bejahte oder verneinte Gröſse ausmachend seyn muſs, je nachdem jenes einzele Glied bejaht oder verneint ist.

Beweis.

§. 19. Ein beliebiges Glied der Reihe sey $\frac{d^n y}{1.2.\ldots.n.dx^n}.\alpha^n$, also $\frac{d^{n+1}y}{1.2.\ldots.n.(n+1)dx^{n+1}}\alpha^{n+1}$ das darauf folgende, welche beide der Kürze wegen $R\alpha^n$ und $S\alpha^{n+1}$ heiſsen mögen: so hat man

$$R\alpha^n : S\alpha^{n+1} = R : S\alpha,$$

Selbst auch, wenn S für gewisse Werthe seines x als ein Vollgroſs sich ergibt: so muſs doch indem für α an und für sich, also von jenen Werthen des x unabhängig, eine $= o$ werdende Gröſse angenommen wird, mit $\alpha = o$ auch $S.\alpha = o$ geworden seyn. (Vorerin. IX.)

Mag nun die absolute Gröſse jenes Differential-

quotienten, welcher nicht $=o$ ist, und auch deren $\frac{1}{1.2.\ldots n.}$ter Theil R, um eine noch so kleine bestimmte Gröfse von der o verschieden seyn: so mufs es doch zwischen dem $\alpha = \frac{R}{S}$, bei welchem $S.\alpha = R$ sich ergeben würde, und demjenigen $\alpha = \frac{o}{S}$, bei welchem $S\alpha = o$ seyn würde, immer noch unendlich viele α geben, bei welchen $S\alpha < R$, also auch $S\alpha^{n+1} < R\alpha^n$, also $R\alpha^n > S\alpha^{n+1}$, also die absolute Gröfse des nten Gliedes gröfser, als des $(n+1)$ten Gliedes ist.

Noch mehre nachfolgende Glieder seyen in absoluter Gröfse $T\alpha^{n+2}$; $U\alpha^{n+3}$ u. s. w., so ist es hiemit schon erwiesen, dafs auch $S\alpha^{n+1} > T\alpha^{n+2}$, auch $T\alpha^{n+2} > U\alpha^{n+3}$ u. s. w. seyn mufs; wodurch nun der Lehrsatz dargethan ist.

Anmerkung 1.

§. 20. In meiner Neuen Methode habe ich Seite 45 auf andere Weise dargethan, dafs man für die Anwendung der Taylorschen Reihe auch die unendlich grofsen Werthe in den nachfolgenden Gliedern nicht zu scheuen habe; nachdem ich vorher meine Bedenken gegen andere von mir versuchten Beweise, Seite 41 u. s. w. aufgestellt hatte.

Anmerkung 2.

§. 21. Wenn man z. B. für eine kubische Gleichung $y = x^3 + Ax^2 + Bx + C = o$, oder auch für eine noch höhere Gleichung gefunden hat, dafs eine ganze Zahl m statt x gesetzt, das Aggregat y nicht genau $= o$ sondern $Y \overset{(x=m)}{=} \mp G$ gibt, die nächste ganze Zahl $m+1$ statt x gesetzt dagegen ein $= \pm H$ gebe,

folglich zwischen $x = m$ und $x = m + 1$ eine irrationale Wurzel der Gleichung fallen muſs, welche ein $x = m + \alpha$) mit einem α kleiner als 1 ist: so weiſs man durch Taylors Reihe, daſs

$$(x=m+\alpha \quad y = \mp G + \frac{dy}{dx}^{(x=m)}\alpha + \frac{ddy}{2.dx^2}^{(x=m)}\alpha^2 + \frac{dy}{6.dx^3}^{(x=m)}\alpha^3 + \ldots$$

seyn muſs.

Da sich nun

$$(x=m) \quad x=m$$
$$p = 3x^2 + 2Ax + B = 3mm + 2Am + B$$
$$q = 6x + 2A = 6m + 2A \quad \text{ergibt,}$$

so kann man $\mp G + (3mm + 2Am + B)\alpha = o$ gesetzt, hieraus α schon ziemlich genau finden.

Will man aber α genauer haben, so ist es rathsam, nicht von vorne wieder anzufangen, wie man es zu lehren pflegt, sondern sogleich

$\mp G + (3mm + Am + B)\alpha + (3m + A)\alpha\alpha = o$ zu setzen, und durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung α zu finden.

Es bieten sich dabei so mancherlei Hülfen dar, daſs man wohl meistens mit dieser Annäherungs-Methode besser, als mit irgend einer andern fährt.

§. 21. Wäre y nur ein kubisches Aggregat, so würde sogleich

$\mp G + (3mm + 2Am + B)\alpha + (3x + A)\alpha\alpha + A\alpha\alpha\alpha = o$ gesetzt, diejenigen drei α bestimmend seyn, welche durch $x = m + \alpha$ die drei Wurzeln des $y = o$ ganz genau angeben müſsten. Obgleich nun dieses α zu finden, selbst schon die Auflösung einer kubischen Gleichung voraussetzt; so gewährt es doch ebenfalls Vortheile, dieses zu wissen.

Aber, wenn ich nicht andere Arbeiten für meine der Praxis bestimmten Zuhörer wichtiger halten müſste, so würde ich eine Methode druckfertig ma-

chen, nach welcher man die möglichen Wurzeln jeder kubischen Gleichung bis auf 10000tel genau aus bequemen Tafeln abnehmen kann. Die Gründe dieser Tafeln sind von mir vermittelst der Differential-Rechnung gefunden; können aber wegen anderer rückständigen, nöthigeren Lehren hier nicht vorgetragen werden. Insbesondere verdient für Practiker die Untersuchung des Gröfsten und Kleinsten im folgenden Capitel sorgfältig dargestellt zu werden.

Siebenzehntes Capitel.

Anwendung der Differentialquotienten zur Auffindung der gröfsten und kleinsten Functionswerthe.

§. 1. Die Lehre vom Gröfsten und Kleinsten ist auch für den praktischen Mathematiker und insbesondere für den Maschinisten von gröfster Wichtigkeit. Denn es ist, um in Hinsicht des letzteren nur ein Beispiel aufzuführen, doch gar nicht selten der Fall, dafs man dadurch auch praktisch anstellige Regeln aufzufinden weifs, unter welchen eine gegebne Kraft vermittelst der verlangten Maschine die gröfste Wirkung zu leisten vermag, oder die verlangte Wirkung mit der kleinsten Kraft erreicht werden kann; indem man darzulegen weifs, durch welche Einrichtungen die Bewegungshindernisse samt dem anderweitigen Kraftverluste ein Minimum, ein Kleinstes werden müssen. Eine neue, bisher meines Wissens nicht gehörig beachtete Nützlichkeit für die Praxis werden diese Lehren auch dadurch gewinnen, dafs wir zugleich darauf achten, auf welcher Seite hin man von

dem strengsten Maximo oder Minimo der Theorie am unschädlichsten abweichen könne.

§. 2. Die Lehren vom Gröfsten und Kleinsten können graphisch, durch gezeichnete Linien, oder auch lediglich calculatorisch, durch Functionenbetrachtung behandelt werden. Es ist das rathsamste, beide Methoden mit einander zu verbinden, auch durch einige Beispiele den Uebergang aus der einen Methode in die andere deutlich darzulegen.

Beide Methoden können einander treffliche Dienste leisten, und müssen auch in den schwierigsten Fällen einander entsprechen, wenn man den Unterschied zwischen der Geometrie der Alten und der algebraischen Geometrie, auch, wo Trigonometrie zu Hülfe genommen wird, die Unterscheidung zwischen der eigentlich geometrisch - trigonometrischen, und der uns nothwendig gewordenen algebraisch-trigonometrischen Scala vor Augen behält! Die dahin gehörige Sicherheit und Kürze des Vortrages wird ungemein befördert, wenn man über die willkührlichen Verbindungsanlagen zwischen dem algebraischen Calcul und dessen graphischer Darstellung, ein für allemal einverstanden ist und bleibt.

Mögen immerhin die orientalischen Sprachen von der Rechten nach der Linken zu, die übrigen nach der Gegenrichtung geschrieben werden; wenn nur jeder Ordnung getreu geblieben, nicht damit hin und her gewechselt, oder, um das Recht der Willkühr an den Tag zu legen, bisweilen auch diese und jene von der transcendentalen Richtungen gewählt wird!

§. 3. Als transversal, diagonal gerichtet, ist jede Richtung zu betrachten, welche mit keiner von den bereits festgesetzten vier Richtungen völlig übereinstimmt, deren zwei und zwei zusammen genommen, die beiden einzigen reinen Richtungspare in der Ebne aus-

machen; welche einander normal gerichtet sind, und daher nichts mit einander gemein haben. Keineswe-ges soll damit geleugnet werden, dafs man nicht für diese und jene Transversalen ein für sich bestehendes Richtungssystem, namentlich in Hinsicht der trigono-metrischen Scala bisweilen noch anlegen könne; aber sehr häufig hat man dabei Ursach, besonders in Be-treff der subsractiven und additiven Gröfsen auf die vorher schon zum Grunde gelegten Richtungspare Rücksicht zu nehmen; wenn man nicht am Ende das gemeinschaftliche Resultat fast eben so mühsam zer-stückelt und vereinzelt sich zusammen fügen will, als es in der Geometrie der Alten, welche von dem Pan-kratismus des algebraischen Bejahten und Verneinten keine Begriffe hatte, allerdings nur geschehen könnte.

Willkührlicher Satz.

Der Kürze und Deutlichkeit wegen werde daher ein für allemal festgesetzt, dafs fernerhin, wie es schon bisher von uns beobachtet ist, das Abscissen-+ ins Rechtere, das Ordinaten-+ ins Höhere ge-richtet sey, also die beiden verneinten Richtungen ins Linkere und Tiefere gerichtet seyn sollen. Auch werden fernerhin wie bisher, bis auf ausdrück-liche Gegenerinnerung, allemal einander parallele und ihren Abscissen normale Ordinaten vorausgesetzt.

Behauptung.

§. 4. Soll die zu einer gewissen Abscisse $x = AP$ gehörige Ordinate $y = P'M'$, gröfser seyn, als die zur $A'P = x = x - \Delta x$ gehörige Ordinate $P'M' = y$, und zugleich auch gröfser seyn, als die zur $AP' = x' = x + \Delta x$ gehörige Ordinate $P'M' = y'$: so mufs nicht nur dem $(-)\Delta x = PP$ ein verneintes $\Delta y = N'M$

sondern auch dem $(+)\Delta x = PP'$ ein verneintes $\Delta y = NM'$ zugehören; es mag nun y' bejaht seyn wie RM' in Fig. 20. oder es mag y verneint seyn, wie PM' in Fig. 21.

§. 4*. Denn da alle Curven, die wir vermittelst des algebraischen Calculs behandeln wollen, auch dessen Regeln gemäfs construirt werden müssen: so kann ja eine Ordinate y' gröfser als ihre beidersei tigen Nachbaren y und y'' nur heifsen, wenn sie entweder mehr Bejahtes, oder doch weniger Verneintes als ihre Nachbaren enthält, und daher zu ihr irgend etwas verneintes hinzugethan werden müfste, um sie auf $= y$ oder $= y''$ zu bringen; es mag nun sie, diese y selbst, bejaht, oder verneint, oder auch $= o$ seyn. Es ist nämlich, wie ich es anderwärts dargethan habe, aus den regelmäfsigen Gewohnheiten und nützlichen Absichten der Algebra eine ganz nothwendige Folge, von jeden zwei Gröfsen diejenige die gröfsere zu nennen, welche entweder mehr Bejahtes oder doch weniger Verneintes in sich hat, als die andere. (Neue Erörterungen über $\mp$, Cöthen 1801. Seite 203. §. 9, 10 etc. und §. 18, nebst Seite 19, §. 15 und 16.)

§. 5. Indem wir fernerhin, wie bisher, gerade die x zur unveränderlichen Gröfse annehmen wollen, so können wir gerade nur ihre Belegung Δx nach Belieben bald bejaht, bald verneint annehmen; von der ihr zugehörigen Ordinatenbelegung Δy aber müssen wir auf die jedesmalige Function y es ankommen lassen, ob, und unter welchen Bedingungen sie für das dem $(+)\Delta x$ oder $(-)\Delta x$ zugehörige Δy einen bejahten oder verneinten Werth bestimme, und es dadurch als ein $(+)\Delta y$ oder als ein $(-)\Delta y$ uns bekannt werden lasse.

§. 6. Wollen wir also aus der vorgegebnen Function $y = X$, oder, wo die Auflösung für y noch nicht geleistet ist, schon aus der vorgegebnen Gleichung zwischen y und x, worin y noch als eine verwickelte Function vorkommen mag, gewiſs werden, daſs gerade das, einem gewissen x zugehörige y gröſser sey, als das einem $x + \Delta x$ zugehörige $y + \Delta y$, und das einem $x - \Delta x$ zugehörige $y + \Delta y$: so müssen wir aus der Function zu entscheiden wissen, daſs jedes von diesen beiden Δy gerade ein $(-)\Delta y$ sey.

Wenn wir nun statt des $(\mp)\Delta x$ ein zu 0 werdendes $(\mp)dx$ annehmen, wofür dann $y + \Delta y$ in $= y + dy = y$ übergeht, und wenn auch dieses Uebergehen sowohl für $(-)dx$ als $(+)dx$ ein gröſser werden ausmachen soll: so wird bei dem einen Uebergehen der Differentialquotient $\frac{(-)dy}{(-)dx}$ bejaht, und bei dem andern Uebergehen, der Differentialquotient $\frac{(-)dy}{(+)dx}$ verneint sich ergeben müssen.

Soll dagegen $PM = y$ ein Kleinstes seyn, ein bejahtes nach Fig. 20*, ein verneintes nach Fig. 21*, so wird sowohl mit verschwindendem $(-)dx$, als mit verschwindendem $(+)dx$, das Uebergehen des $y + dy$ in $= y$ ein Kleinerwerden ausmachen müssen, würde daher für den ersten Uebergang der Quotient $\frac{(+)dy}{-dx}$ eine verneinte, für den andern Uebergang aber der Quotient $\frac{(+)dy}{+dy}$ eine bejahte Gröſse seyn müssen.

Auf diese Ansichten und ihre weitere Verfolgung ist meine Neue Methode des Gröſsten und Kleinsten, gegründet, nachdem ich im dortigen 1ten Abschnitte die Mängel und manchen unrichtigen Vortrag der gewöhnlichen Methode dargelegt hatte.

§. 7. In diesem Lehrbuche aber ist es Schuldigkeit, vor allem andern mit der gewöhnlichen Methode bekannt zu machen. Sollten hiebei von geübten Lesern einige sonst gewöhnliche allgemeine Aussprüche vermifst werden: so würden sie in jenem Buche finden, weshalb ich sie für unrichtig anerkenne. In Betreff der leichteren Aufgaben, wie sie in der That den Practikern gewöhnlich nur vorkommen, wird man dieses auch aus meinem hier folgenden Vortrage mit abnehmen können; indem ich diejenigen Mängel der gewöhnlichen Methode, welche auch bei den erwähnten leichteren Aufgaben schon Anstofs und Zweifel verursachen könnten, mit berühren werde.

§. 8. Die gewöhnliche Methode ist folgende.

Sey y eine Function von x, deren gröfste und kleinste Werthe man finden will: so wird zuvörderst

I) der gewöhnliche, regelmäfsige Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = p$ gefunden, welcher schlechterdings noch eine wahre Function des x seyn mufs, wenn y irgend eines gröfsten oder kleinsten Werthes empfänglich seyn soll. Wenn nun x einen solchen Werth des x bedeutet, welcher statt eines jeden x im $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt, uns $P' \overset{(x = x')}{(= P)} = o$ giebt: so ist es gewifs, dafs mit jedem, diesem x zugehörigen y, indem es erreicht wurde, der Aenderungstrieb der Function y sich vernullt hat, es mag nun übrigens dieser Aenderungstrieb, indem y zu y wurde, mit $(+)\frac{dy}{dx}$ ein $\begin{matrix}\text{Vergröfserungstrieb}\\ \text{Verkleinerungstrieb}\end{matrix}$ gewesen seyn. Welcher von diesen beiden Trieben wirklich vorhanden gewesen sey, soll nach der gewöhnlichen Methode, durch den ersten Differentialquotienten nicht be-

stimmt werden; denn man pflegt ja dessen Nenner dx allemal bejaht anzusetzen, unbekümmert darüber, dafs bei dem regelmäfsigen Differenziiren, bald ein + dx, bald aber (bei verneinten x) ein — dx gebraucht worden ist! Sondern, was man von den Richtungen dieses Triebes, um mich fernerhin in der Kürze bildlich auszudrücken, zu wissen nöthig hat, darnach wird dann ferner zuvörderst

II) durch den zweiten Differentialquotienten $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = Q$ und dessen auf $x = x^I$ eingeschränktes Q^I geforscht; nöthigen Falles auch durch den dritten, $\frac{dddy}{dx^3}$, und so weiter.

Obgleich ich diesen IIten Theil der Auflösung erst in §. 40. begründen werde, so habe ich doch die Art seiner Anwendung schon vorläufig bei den nächsten Aufgaben mit aufgeführt. Ueberdies aber findet man in diesen Aufgaben auch die graphische Darstellung sorgfältig erklärt; weil sie nicht nur oft die calculatorische Ausführung des IIten Theiles entbehrlich macht, sondern auch in andrer Hinsicht den Practikern deutlich bekannt seyn mufs.

Erste Aufgabe.

§. 9. Eine gegebne Zahl a in zwei solche Theile x und a — x zu zerlegen, dafs ihr Product x.(a — x) ein gröfstes sey.

Auflösung, erster Theil.

§. 10. Das Product, welches ein gröfstes seyn soll, ist eine Function des x. Sie heifse y, so hat man $y = ax - xx$, und ihren Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = a - 2x$. Nun frage man zuvörderst nach demjenigen Werthe des x, bei welchem dieser Differential-

quotient sich vernullt, nämlich $\frac{dy}{dx} = a - 2x = o$ wird. Da es hier einen solchen Werth giebt: so wird nun dieser Werth $x = \frac{a}{2}$ in Anspruch genommen, ob er vielleicht ein solcher Werth des veränderlichen x sey, der das verlangte Maximum uns gewähre!

Graphische Darstellung.

§. 11. Sey beispielweise $a = 5$ gegeben, so würde man für $x = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5$ gesetzt,

$a - x = 5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1 ; 0$ haben,

also $y = 0 ; 4 ; 6 ; 6 ; 4 ; 0$.

Indem man nun die x als Abscissen auf der Abscissenlinie AB, (Fig. 21*.) und die ihnen zugehörigen y als ihre Ordinaten angelegt, auch die Curve dem Gesetze der Stetigkeit gemäfs stetig auszuziehen gesucht hat: so sieht man es gleichsam vor Augen, dafs das für $\frac{dy}{dx} = o$ gehörige $x = \frac{a}{2}$, allerdings dasjenige x sey, dessen Ordinate $y = PM'$ ein gröfstes, und zwar hier gröfser als seine beiderseitigen Nachbaren seyn müsse; indem die bei dem vorhergehenden Puncte 'M gezeichnete tangirende 'MT mit 'MN einen Winkel μ macht, dessen trigonometrische Tangentenzahl dem dortigen Werthe des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ gleich ist; dieses $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\,\mu$ aber kleiner und kleiner, also der Wachsthum der Ordinaten y immerfort geringer wird, bis er in M', wo $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\,\mu = o$ geworden ist, gänzlich aufgehört hat. Da es nun ferner in die Augen fällt, dafs jenseits M,

sogleich für die nächsten Puncte M, das $\frac{dy}{dx} = \text{tang } \mu$, ein verneintes μ gibt, und dabei die PM immer kleiner werdend sind: so sind wir durch diese graphische Darstellung überzeugt, dafs das für $x = \frac{a}{2} = \frac{5}{2}$ gehörige Product $X = x(a-x) = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{aa}{4} = \frac{25}{4}$ $= 6\frac{1}{4}$ das gröfste mögliche Product seyn mufs, welches man durch zwei Theile der Zahl $a = 5$ erhalten könne. Daher es bei dieser graphischen Darstellung an dem ersten Theile der Auflösung genüget.

Die ganze durch $y = ax - xx$ ausgedrückte Curve wird auch unterhalb der Abscissenlinie, und zwar hier in zwei unendlichen Zügen fortgehen, wenn man auch verneinte Theile der vorgegebnen Zahl a gestatten, also auch verneinte Abscissen anlegen will. Aber auch diese Züge geben keine zweite Ordinate, von der man sagen könnte, dafs sie gröfser sey als ihre beiderseitigen Nachbaren, wie es hier bei der PM allerdings der Fall ist. (Kürzer und im Allgemeinen besonders für schwierige Fälle auch sicherer, wird die Sache durch folgenden zweiten Theil der Auflösung entschieden.)

Auflösung zweiter Theil.

§. 12. Nachdem man der vorgegebnen Function $y = ax - xx$ ersten Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = a - 2x$ gefunden, auch durch $a - 2x = o$ verlangt, gefunden $\left(x = \frac{a}{2}\right)$ $\left(x = \frac{a}{2}\right)$ hat, dafs $\frac{dy}{dx} = a - 2x = o$ seyn, nämlich der Werth des ersten Differentialquotienten

für $x = \frac{a}{2}$ sich $= o$ ergeben mufs: so findet man auch den zweiten Quotienten $\frac{ddy}{dx^2} = -2x^o = -2.1$.

Da dieser nur noch eine Scheinfunction von x ist, welche für jedes x, also auch für $x = \frac{a}{2}$ uns $\frac{ddy}{dx^2}\left(x=\frac{a}{2}\right) = -2x^o\left(x=\frac{a}{2}\right) = -2.\left(\frac{1}{2}\right)^o = -2.1$ geben mufs: so ist durch diesen verneinten Werth des Differentialquotienten es entschieden, (wie wir späterhin §. 40. es allgemein erweisen werden) dafs die vorgegebne Function $y = ax - xx$ für $x = \frac{a}{2}$ einen gröfsten Werth erhält.

Zweite Aufgabe.

§. 13. Unter den Rechtecken DE (Fig. 22.) welche alle einen gleich grofsen Umfang haben, dasjenige D'E' zu finden; welches den gröfsten Flächenraum hat.

Entwickelung der Aufgabe.

§. 14. Der ganze Umfang aller dieser Rechtecke ist gleich bleibend, wenn ihr halber Umfang DB + BE = a, einerlei gegebne Länge = a hat. Sey nun BD = x, so ist BE = a − x; und X den Flächenraum dieser Rechtecke genannt, hat man $X = ax - xx$.

Erster Theil der Auflösung.

§. 15. Da der Differentialquotient $\frac{dX}{dx} = a - 2x$ sich $= o$ ergiebt für $x = \frac{a}{2}$: so mufs man dieses

$x\,x = \frac{a}{2}$ in Anspruch nehmen; ob das ihm zugehörige $X = ax - xx = \frac{aa}{4}$ der gröfste hier erreichbare Flächenraum sey.

Graphische Darstellung.

§. 16. Sey z. B. $a = 5$ Fufs gegeben, so erhält man ganz genau die Curve der vorigen Aufgabe, Fig. 21*. indem die den verschiedenen x zugehörigen Werthe der $X = x(a - x)$, als Ordinaten y angelegt werden; das heifst, die Verhältnisse dieser Flächenräume durch lineäre Ordinaten y angelegt werden.

Gesetzt aber den halben Umfang $a = 12$ gegeben, so hat man, $x = 0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\ldots$ gesetzt,

$a - x = 12\,;\,11\,;\,10\,;\,9\,;\,8\,;\,7\,;\,6\,;\,5\,;\,4\ldots$

also $X = 0\,;\,11\,;\,20\,;\,27\,;\,32\,;\,35\,;\,36\,;\,35\,;\,32\ldots$

Wollte man nun auch hier die X, nach dem für die x gewählten Mafsstabe anlegen; so würde die Curve zu einer unbequemen Höhe ansteigen. In der Fig. 21*. sind sie nach einem 4 mal kleinern Mafsstabe angelegt; und überhaupt kann man die Ordinaten beliebig nach einem gröfsern oder auch kleinern Mafsstabe als die Abscissen anlegen. Wenn nur das Verhältnifs der Ordinaten unter sich richtig aufgetragen wird; so wird durch gröfseren oder kleineren Mafsstab, irgend eine Concavität in Convexität, oder umgekehrt, nie verändert; und auf Concavität und Convexität der Curve kommt es ja hier lediglich an, um es vor Augen zu haben, bis wohin die Ordinaten wachsen oder abnehmen.

Ueberdies ist es hier ganz offenbar, dafs die X, welche hier durch lineäre y dargestellt werden, eigentlich Flächenräume, also in Hinsicht ihres Mafsstabes den wirklich lineären Abscissen x heterogen sind;

folglich nur in Hinsicht der Verhältnisse unter sich selbst, durch lineäre y dargestellt werden können.

§. 17. *Auflösung zweiter Theil*

ist hier derselbe wie in §. 12., da man ja dieselbe Function $y = ax - xx$ hat.

Vorerinnerung.

§. 18. Unter allen Dreiecken ist es das gleichseitige; unter allen Parallelogrammen von einerlei Seitenlinien, ist es das rechtwinklige; unter allen rechtwinkligen das gleichseitige, also das Quadrat; unter allen Fünfecken das regulaire; und überhaupt unter allen n-ecken ist es das regulaire n-Eck; welches mit einerlei Umfang den gröfsten Flächenraum einschliefst, und durch welches auch umgekehrt, einerlei Flächenraum von dem kleinsten möglichen Umfange eingeschlossen wird.

In beider Hinsicht steht das regulaire Dreieck dem regulairen Vierecke, dieses dem regulairen Fünfecke nach, u. s. w.; daher der Kreis, als ein regulaires Vieleck von unendlich vielen Seiten, auch diejenige Flächen-Figur ist, welche einen gegebnen Flächenraum mit dem kleinsten Umfange umschliefst.

Dieses alles kann durch die Methode des Gröfsten und Kleinsten allerdings erwiesen werden. Da wir aber diese Methode an vielen andern Beispielen aufzustellen haben, welche nicht im allgemeinen eben so leicht bestimmt und beurtheilt werden können, auch für die Praxis einen vielseitigern Nutzen gewähren: so wollen wir uns in Hinsicht jener Aufgaben mit der nächstvorhergehenden und der nächstfolgenden begnügen.

Dritte Aufgabe.

§. 19. Ein gegebner Flächenraum, A Quadratfufs, soll rechtwinklig, also als ein rechtwinkliges Viereck dargestellt werden; welche Seiten mufs man ihm geben, damit sein Umfang ein Kleinstes sey?

Entwickelung.

§. 20. Seyen $=u$ und $=v$ zwei anliegende Seiten des gesuchten Rechteckes, so mufs I) $u.v=A$ seyn. Da der ganze Umfang dieses Rechteckes $=2u+2v$ ist; der ganze Umfang aber ein Kleinstes seyn mufs, wenn der halbe Umfang $u+v$ es ist: so kann II) $z=u+v$ als diejenige Function betrachtet werden, deren kleinsten Werth man zu finden hat.

Auflösung erster Theil.

§. 21. Da durch obige Gleichung I) gewifs ist, dafs jedes $v=\frac{A}{u}$ seyn mufs; so hat man durch I) und II) zusammen genommen, auch $z=u+\frac{A}{u}$, nunmehr also z als Function des einzigen u. Der Differentialquotient ist $\frac{dz}{du}=1-\frac{A}{uu}$; und $\frac{dz}{du}=1-\frac{A}{uu}=0$ gefordert, verlangt $u=\sqrt{A}$

Graphische Darstellung.

§. 22. Sey Beispielsweise $A=6$ Quadratfufs gegeben, so hat man

$u=0\ ;1;2;3;4\ ;5\ ;6;7\ \ldots$ gesetzt,

die $z=\infty;7;5;5;5\frac{1}{2};6\frac{1}{3};7;7\frac{9}{7}\ \ldots$

Nach Fig. 23. die u als Abscissen, die z als Ordinaten aufgetragen, fällt es wiederum in die Augen,

dafs die dem $u = \sqrt{6} = IP$ zugehörige $PM = u' + \frac{A}{u'}$ $= \sqrt{6} + \frac{6}{\sqrt{6}} = 2.\sqrt{6} = 2.2{,}449 = 4{,}898$ eine kleinste unter den ihr benachbarten z und z' ist; indem bei dem Puncte M' der Curve, wo $\frac{dz}{du} = o$ ist, die linkeren Nachbaren aufgehört haben kleiner zu werden, und die rechteren Nachbaren anfangen, gröfser zu werden.

Auflösung zweiter Theil.

§. 23. Nachdem wir für die Function $z = u + \frac{A}{u}$ $\frac{dz}{du} = 1 - \frac{A}{uu}$, und dafs dieser erste Quotient für $u = \sqrt{A}$ sich $= o$ ergiebt, in §. 21. schon gefunden haben: so finden wir auch den zweiten, $\frac{ddz}{du^2} = 2.\frac{A}{u^3}$. Da nun dieser $\frac{ddz}{du^2}\,(u = \sqrt{A}) = 2.\frac{A}{(\sqrt{A})^3}$ $= \frac{2}{\sqrt{a}}$, also für ein nicht verneintes $\sqrt{a}$ sich nicht verneint, und daher so gut als bejaht sich ergibt: so sind durch diesen bejahten Werth des zweiten Differentialquotienten wir versichert (wie es ebenfalls in §. 40. erwiesen wird), dafs $z\,(u = \sqrt{A}) = \sqrt{A} + \frac{A}{\sqrt{A}}$ $= 2\sqrt{A}$ einen kleinsten Werth der Function z ausmacht.

Anmerkung.

§. 24. Da in dieser Aufgabe §. 19. der Flächenraum schlechthin A Quadratfufs gegeben, nicht aber hinzugefügt ist, dafs er algebraisch bejaht oder verneint geflächt seyn soll; so mufs auch bei dessen Ein-

formung in ein rechtwinkliches Viereck für die Summe seiner Seitenlinien $= 2(u+v)$ nach der Richtung dieser Linien gar nicht gefragt werden, also bei dem gefundenen $u = \sqrt{A}$, weder von Bejahtheit noch Verneintheit dieser Linien die Rede seyn, sondern unter dem $\sqrt{A}$ schlechthin ihre Länge verstanden werden. Ein eignes System für die gröfsten und kleinsten Werthe der Functionen, unter der Bedingung aufzuführen, dafs bei allen dabei vorkommenden Grössen, blofs von ihrer absoluten Gröfsheit die Rede seyn soll, haben wir nicht nöthig, da wir in der Algebraischen Auflösung, Thl. 1. als nothwendig erwiesen haben, dafs die absoluten Gröfsen, wo sie neben bejahten und verneinten aufgeführt sind, also auch, wo sie einem für das algebraisch Bejahte und Verneinte angemessenen Systeme unterworfen werden, allemal als bejahte zu betrachten sind.

Allerdings aber kann und mufs die Frage seyn können, was denn die algebraische Wurzel $u = \mp\sqrt{A}$ für Resultate hier geben würde, wenn man fordern wollte, die Aufgabe algebraisch zu verstehen! Daher ich späterhin es darlegen werde, dafs das hier aufgestellte System auch auf diese Frage ganz befriedigend und consequent zu antworten weifs.

Vierte Aufgabe.

§. 25. Unter allen um $= a$ verschiedenen Zahlen, x und $x + a$, diejenigen zu finden, deren Product $y = ax + xx$ eine Eminenz, das heifst ein Gröfstes oder Kleinstes, oder auch, wie es bei späteren Aufgaben ebenfalls vorkommen könnte, ein eminenter Wendungswerth sey.

Auflösung erster Theil.

§. 26. Da der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = 2x + a$, für $x = -\frac{a}{2}$ sich vernullt; so hat man das diesem x zugehörige $y = -a\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} = -\frac{a^2}{4}$ zu prüfen, ob es ein Gröſstes oder Kleinstes sey.

Graphische Darstellung.

§. 27. Sey $a = 5$ gegeben, so hat man

$x = 0; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7 \ldots$
$x + a = 5; 4; 3; 2; 1; 0; -1; -2 \ldots$
also $y = 0; -4; -6; -6; -4; -0; +6; +4 \ldots$

Da hier (Fig. 24.) die den verneint gerichteteten $x = A\mathfrak{P} = -1; = -2$ zugehörigen $y = \mathfrak{P}\mathfrak{M}$ an verneint gerichteten Längen zunehmen, bis diese Verlängerung bei $\mathfrak{M}'$ wo $\frac{dy}{dx} = 0$ aufgehört hat, und die anderseitigen Nachbaren $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ sich verkürzen: so ist $\mathfrak{P}\mathfrak{M}'$ die längste unter den verneinten Ordinaten; und muſs eben deshalb, weil sie mehr Verneintes als ihre Nachbaren in sich hat, eine kleinste genannt werden. (Man s. oben §. 4*.)

Auflösung zweiter Theil.

§. 28. Da der zweite Differentialquotient, $\frac{ddy}{dx^2} = 2.x^0 = 2.1$, durchaus für alle x bejaht, also auch für $x = -\frac{a}{2}$, wofür der erste $\frac{dy}{dx} = 2x + a$ sich vernullt, ebenfalls bejaht ist: so sind wir dadurch versichert, daſs das Product $y = x(x + a)$ für $x = -\frac{a}{2}$ einen kleinsten Werth hat.

Fünfte Aufgabe.

§. 29. Für die durch $y = x^3 - 7x - 6$ bestimmte Curve ihre eminenten y zu finden.

Auflösung erster Theil. (Fig. 25.)

§. 30. Es ist $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 7$, also $= 0$ für $x = \mp\sqrt{\frac{7}{3}}$. Für das bejahte $x = +\sqrt{\frac{7}{3}} = AP$ ist die zugehörige $y = P\mathfrak{M}$ eine längste unter ihren ebenfalls verneinten beiderseitigen Nachbaren, also eine **kleinste**. Für das verneinte $x = -\sqrt{\frac{7}{3}} = A\mathfrak{P}$ ist die zugehörige $y = \mathfrak{P}M$ eine längste unter ihren beiderseitigen bejahten Nachbaren, also eine **gröfste**.

Auflösung zweiter Theil.

§. 31. Da $\frac{ddy}{dx^2} = 6x$ ist, also dieser zweite Quotient 1) für $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ bejaht, und 2) für $x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$ verneint sich ergibt: so sind wir dadurch versichert, dafs der erste Werth des x einen kleinsten, und der zweite Werth des x einen gröfsten Werth der Function y geben mufs.

Sechste Aufgabe.

§. 32. Für die durch $y = a^3 + (x-a)^3$ gegebne Curve (Fig. 26.) die eminenten y zu finden.

Auflösung erster Theil.

§. 33. Es ist $\frac{dy}{dx} = 3(x-a)^2$, also $= 0$ für $x = a$; aber das diesem $x = a$ zugehörige $y = a = P'M'$ ist weder ein gröfstes noch ein kleinstes. Da bei M' das $\frac{dy}{dx} = 0$ geworden ist, so haben freilich die PM

diese Nachbaren zu ihrer Linken, hier sich zu verlängern aufgehört; aber da die graphische Darstellung der Curve es vor Augen legt, dafs die Nachbaren zur Rechten wiederum an Länge zunehmend sind: so ist die $y = PM$ zwar gröfser als ihre linkeren, aber kleiner als ihre rechteren Nachbarn.

Auflösung zweiter Theil.

§. 34. Der zweite Coefficient ist $\frac{ddy}{dx^2} = 6(x-a)$. Da nun dieser für $x = a$ ebenfalls $= o$, also weder bejaht noch verneint sich ergibt: so wird es auch durch ihn noch nicht entschieden, ob die Function y für $x = a$ einen gröfsten oder kleinsten Werth gebe. Man mufs dann auch den dritten Quotienten $\frac{d^3y}{dx^3} = 6.x^o = 6.1$, in Anspruch nehmen, wodurch nun hier entschieden wird, wie wir ebenfalls später in §. 40. es lehren werden, dafs die Function $y^{(x=a)}$ einen eminenten Wendungswerth ausmacht.

Erklärung 1.

§. 35. Die Curve (Fig. 26.) hat in M einen Wendungspunct, weil M den Endpunct eines concaven Bogens 'MM und zugleich den Anfangspunct des anderseitigen convexen Bogens MM' ausmacht; der einfache Curvenzug 'MMM', welcher einer und eben derselben Ordinatenreihe $y = a + (x-a)^3$ zugehört, im Puncte M aus Concavität in Convexität sich umwendet. Wenn dergleichen Wendungen bei solchen y eintreten, deren $\frac{dy}{dx} = o$ ist: so verdienen diese y eminenten Wendungswerthe zu heifsen.

Erklärung 2.

§. 36. Alle gröfsten und kleinsten Werthe, die wir in den vorigen fünf Aufgaben vor Augen gesehen haben, verdienen zweiseitige zu heifsen, weil jeder von ihnen gröfser als kleiner war, als seine beiderseitigen Nachbaren. In der Folge werden wir auch einseitige gröfste und kleinste y vorfinden. Z. B. die PM' (Fig. 27.) ist die gröfste in der einen Ordinatenreihe $y = PM$, und ist ein kleinste der andern Ordinatenreihe $y = Pm$; ist aber eine einseitige Enimenz, weil ihre anderseitigen Nachbaren, vermöge der Gleichung, durch welche diese Curve gegeben ist, unmöglich sind.

Erklärung 3.

§. 37. Alle Maxima und Minima und eminenten Wendungswerthe, kurz alle Eminenzien, welche, wie die bisher betrachteten, durch $\frac{dy}{dx} = o$, durch Vernullungswerthe des ersten Differentialquotienten gefunden werden, sollen Eminenzien der ersten Art heifsen. Eminenzien der zweiten Art sind dann alle diejenigen zu nennen, für welche der erste Theil der Auflösung seyn mufs, dafs man diejenigen Werthe der Grundgröfse x bestimmt, bei welchen $\frac{dy}{dx} = \infty$ sich ergibt.

§. 38. Wie man auch für die letzteren mit methodischer Sicherheit entscheiden könne, ob sie ein Gröfstes oder Kleinstes, oder nur ein eminenter Wendungswerth seyen, denke ich in meiner schon erwähnten Neuen Methode des Gröfsten und Kleinsten, bündig dargelegt zu haben. Alle bis dahin bekannten Methoden, über diese drei Eminenzien cal-

culatorisch, ohne die mühsame, oft auch unzureichende graphische Darstellung zu entscheiden, waren nicht nur auf die Eminenzien der ersten Art eingeschränkt, sondern selbst auch unter diesen nur für die zweiseitigen allgemein befriedigend; und selbst auch hier wird man die Regeln allgemein durchgreifend nur bei denen neueren Lehrern vorfinden, welche mit mir eigentlich einverstanden sind, dafs ein von ihnen so genanntes verneintes Gröfstes oder Kleinstes, in der Algebra eigentlich kein Gröfstes und Kleinstes, sondern ein Kleinstes und Gröfstes sey. Auch Kästner hatte sich darüber sehr ausdrücklich, und unrichtig bestimmt.

Da es aber allerdings der Fall ist, dafs diejenigen gröfsten und kleinsten Werthe, die man für die gewöhnliche Praxis aufzusuchen hat, meistentheils zu den zweiseitigen der ersten Art gehören: so will ich mich fürs erste wenigstens auf die dahin gehörige gewöhnliche Methode einschränken. Ihr gemäfs ist im Allgemeinen folgender

Auflösung zweiter Theil.

§. 39. Nachdem man in dem ersten Theile der Auflösung (mit oder ohne graphische Darstellung) den ersten Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = p$ als eine Function von x gefunden, auch gesehen hat, dafs es ein solches x^{I} (vielleicht auch mehre dergleichen Werthe des x) gibt, welches statt eines jeden im p noch vorhandenen x gesetzt ein $p^{(x=x^{I})} = o$ gibt: so mufs dann auch der zweite Differentialquotient $\frac{ddy}{dx\,dx} = Q$ gefunden werden. Dieses Q ist nun

entweder 1) nur noch eine Scheinfunction des x, also eine constante, mit x nicht veränderliche Gröfse,

, oder 2) selbst noch eine wahre Function des unveränderlichen, mit dx belegten x.

Im 1sten Falle ist die durchaus schon bestimmte unveränderliche Gröfse

des Q $\begin{matrix}\text{entweder bejaht}\\ \text{oder verneint}\end{matrix}$ und hierdurch entschieden,

dafs das dem obigen x zugehörige y $\begin{matrix}\text{ein Minimun}\\ \text{oder Maximum}\end{matrix}$ ist,

Im zweiten Falle wird in des $\frac{ddy}{dx\,dx} = Q$ allgemeinem veränderlichen Werthe Q, jedes seiner x auf das obige x^{I} (oder, wenn es deren mehre gibt, nach und nach auf jedes derselben) eingeschränkt; und je nachdem nun des allgemeinen Q dadurch eingeschränkter

Werth $\begin{matrix}(x = x^{I})\\ Q\end{matrix}$ $\begin{matrix}\text{entweder bejaht}\\ \text{oder verneint}\\ \text{oder} = o\end{matrix}$ ist, ist es auch entschieden, dafs das dem jedesmal gebrauchten x^{I} zugehörige y^{I} ein $\begin{matrix}\text{gröfster}\\ \text{kleinster}\end{matrix}$ fernerhin zu untersuchender Werth ist.

Beweis dieser Auflösung.

§. 40. Sey y eine Function von x, welche es wolle, so wissen wir bereits

dafs $\overset{(+\alpha)}{y} = y + \frac{dy}{dx}\alpha + \frac{ddy}{1.2.dx^2}\alpha^2 + \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3}\alpha^3 + +\ldots$

und $\overset{(-\alpha)}{y} = y - \frac{dy}{dx}\alpha + \frac{ddy}{1.2.dx^2}\alpha^2 - \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3}\alpha^3 + -\ldots$

ist, indem $\overset{(+\alpha)}{y}$ und $\overset{(-\alpha)}{y}$ bedeuten, was aus y geworden seyn mufs, wenn man jedem seiner x ein $+\alpha$ oder $-\alpha$ zugelegt hat, wobei α eine beliebig grofs oder klein angenommene, doch dem x allemal gleichartige Gröfse seyn kann, x aber seine ganze Veränderlichkeit im y, im $\frac{dy}{dx}$, u. s. w. beibehält.

Nun sey $x = f$ einer von denen Werthen des x, $(x = f)$ bei welchen $\frac{dy}{dx} = o$ wird, (das heifst, der erste Differentialquotient $= o$ ist, wenn man in seinem Werthe, der noch eine Function des x ist, jedes $x = f$ gesetzt hat); sey auch ferner $y \underset{(x=f}{} = F$ nämlich F, was aus der Function y sich ergibt, wenn jedes ihrer x auf $x = f$ eingeschränkt wird: so mufs

$$\overset{(+\alpha)}{F} = F + o + \frac{(x=f)}{1.2.dx^2} \cdot \alpha^2 + \frac{(x=f)}{1.2.3.dx^3} \cdot \alpha^3 + \frac{(x=f)}{1.2.3.4.dx^4} \cdot \alpha^4 + + \ldots$$

und

$$\overset{(-\alpha)}{F} = F - o + \frac{(x=f)}{1.2.dx^2} \cdot \alpha^2 - \frac{(x=f}{1.2.3.dx^3} \cdot \alpha^3 + \frac{(x=f)}{1.2.3.4.dx^4} \cdot \alpha^4 - + \ldots$$

seyn; indem ja hiermit nur ein einzeler Fall der obigen beiden Reihen behauptet wird, in welchen x jeden Werth haben kann.

§. 41. Wird nun α so klein angenommen verlangt, dafs das Glied mit α^2 in seiner absoluten Gröfse die absolute Gröfse der algebraischen Summe aus allen nachfolgenden Gliedern übertreffend ist: so ist es falls $\frac{ddy}{dx^2}$ entweder 1) einen bejahten, oder 2) einen verneinten Werth hat, eben dadurch gewifs, dafs

im 1sten Falle, jeder der beiderseitigen Nachbaren des F algebraisch gröfser als F, also F ein Kleinstes seyn mufs,

im 2ten Falle aber, jeder der beiderseitigen Nachbaren des F algebraisch kleiner als F, also F ein Gröfstes seyn mufs.

§. 42. Wenn nun aber 3) auch $\frac{ddy}{dx^2}$ sich $=0$ ergibt, so wird durch diesen zweiten Differentialquotienten noch nichts entschieden, sondern mufs der dritte $\frac{d^3y}{dx^3}$ zu Hülfe genommen werden. Es mag nun dieser, nachdem man ihn ebenfalls auf $x=f$ eingeschränkt hat, entweder 1) einen bejahten oder 2) einen verneinten Werth geben, so ist es im 1ten Falle gewifs, dafs der Nachbar $F^{(+\alpha)}$ algebraisch gröfser der Nachbar $F^{(-\alpha)}$ aber algebraisch kleiner als F ist; im 2ten Falle auch eben so gewifs, dafs jener um $+\alpha$ entfernte Nachbar algebraisch kleiner, und dieser um $-\alpha$ entfernte, algebraisch gröfser, als F seyn mufs; in beiden Fällen also gewifs dafs dieses F weder einen gröfsten noch kleinsten Werth, sondern einen verneinWendungswerth der Function ausmacht, bei welchem die Function, durch eine Curve dargestellt, zwischen Concavität und Convexität (beides gegen die Abscissenlinie verstanden) wechselt.

§. 43. Sollte aber 3) auch $\frac{d^3y}{dx^2}^{(x=f)}=0$ sich ergeben, so würde auch durch diesen dritten Differentialquotienten noch nicht entschieden, ob das durch $x=f$ bestimmte $y=F$ ein Maximum, oder Minimum oder ein eminenter Wendungswerth sey. Man mufs dann durch den nächsten vierten Differentialquotienten, und falls auch dieser $=0$ sich ergeben sollte, durch den 5ten, u. s. w. zu untersuchen fortfahren.

§. 44. Wir werden es bei unserer Praxis nicht leicht mit Functionen zu thun haben, bei welchen uns nicht schon durch den zweiten oder dritten Differentialquotienten entschieden würde, ob für ein $x = f$, bei welchem $\frac{dz}{dx} = o$ sich ergeben hat, die $y = F$ ein Maximum oder Minimum oder ein eminenter Wendungswerth sey.

Auch werden wir es bis zu §. 50. hin mit lauter solchen Functionen zu thun haben, bei welchen auch wenn α noch so klein genommen wird, niemals einer von den beiden Nachbaren $F^{(+\alpha)}$ und $F^{(-\alpha)}$ unmöglich ist; sondern die gefundene Eminenz, sie mag ein Maximum, oder Minimum oder Wendungswerth seyn, allemal eine zweiseitige Eminenz ist.

§. 44*. Uebrigens, obgleich bei den meisten für unsere Praxis nöthigen Beispielen, der Abstand α zwischen den Nachbarn, von beträchtlicher Gröfse, bisweilen sogar unendlich grofs, ohne Schaden könnte genommen werden: so rathe ich doch, sich sogleich daran zu gewöhnen, dafs man sich die benachbarten $F^{(+\alpha)}$ und $F^{(-\alpha)}$ (auch überhaupt im allgemeinen schon $y^{(+\alpha)}$ und $y^{(-\alpha)}$) als nächste Nachbaren fordert, das heifst je näher je besser, also in einem unendlich kleinen Abstande α, der also, weil α dem x gleichartig seyn mufs, selbst auch ein $= 'dx$ seyn wird, welches dann bei manchen von den höheren Functionen sogar ein $'dx = dx = o$ ganz nothwendig geworden seyn mufs.

§. 45. (In der Folge, und sogleich bei den zweifach variabeln Functionen werde ich es darlegen, dafs der kürzeste und strengste Beweis dieser Lehren, ei-

nes endlichen $\alpha = \triangle x$, und in so fern des Taylorschen Lehrsatzes gar nicht bedarf. Es liegt vielmehr eine sonderbare Furchtsamkeit dabei zum Grunde, dafs man nachdem der zweite Differentialquotient $\frac{ddy}{dxdx} = q$ durch strenge Schlüsse der Differentialmethode auf das genaueste gefunden ist, oder als Fonction seconde $f''y = q$ durch den Functionscalcul, dem Anscheine nach vermittelst lauter endlichen Hülfsgröfsen erobert, eigentlich der Differentialmethode abgeborgt, entwendet ist, gleichwohl das Vermögen dieser Function erst durch ihre Wirkungen vermittelst eines endlichen $\alpha = \triangle x$ zu erforschen nöthig hält! Es ist das gerade eben so, als wenn man in der Statik, nachdem man durch bündige Lehren dieser Wissenschaft die Gröfse und die Richtung eines Druckes, eines Triebes (einer vis in actu primo constitutae) auf das genaueste bestimmt erhalten hätte, gleichwohl das Vermögen dieses Triebes erst vermittelst einer kleinen ihm abgelockten Bewegung kennen zu lernen für nothwendig halten wollte! Man kann sich hier veranlafst finden, an das so genannte Princip der virtuellen Geschwindigkeit zu denken.

Taylors Lehrsatz weifs von einem jeden Differentialquotienten, dem ersten, dem zweiten, dem dritten u. s. w. die ihm einwohnende virtutem dadurch vor Augen zu legen, dafs man durch ihn auf eine sehr bequeme und sichere Weise erfährt, was jene virtus zur Vesgröfserung oder Verkleinerung der gegebnen Function vermittelst eines $+\triangle x$ als auch vermittelst eines $-\triangle x$ bewirken würde.

Sehr bequem wird dieser Lehrsatz auch dadurch, dafs man bei seinem Gebrauche, wie wir ihn sorgfältig oben begründet haben, nicht etwa noch zu fragen braucht, ob das regelmäfsige angelegte Differential dx, wodurch man die Differentialquotienten

gefunden hat, ein $+dx$ oder ein $-dx$ gewesen sey. Eben diese Bequemlichkeit wird auch uns verbleiben, wenn wir späterhin, um von den Wirkungen der Differentialquotienten nur das Wesentliche für die Untersuchung der Eminenzien zu benutzen, nur dx statt $\triangle x$ ansetzen, auch bisweilen $\frac{dy}{dx}dx$; $\frac{ddy}{dxdx}dxdx$ und s. w. schreiben, da denn jedes dx im Multiplicator für sich nicht nur bejaht, sondern auch verneint gefordert werden kann; indem ja statt $dy.(-dx)$ dann $-\frac{dy}{dx}dx$ geschrieben steht.

Auch für die Untersuchung der eminenten Functionswerthe verdient der treffliche Taylorsche Satz nicht nur gelehrt, sondern auch von den Anfängern eingeübt zu werden, wozu nun die folgenden auch an und vor sich nützlichen Aufgaben dienen können. Absichtlich aber habe ich einige vorzüglich merkwürdige mechanische und hydraulische bis dahin, wo sie im Zusammenhange ihres Gebrauches vorkommen werden, ersparen wollen.)

Siebente Aufgabe.

§. 46. **Die gröfsten und kleinsten unter den Ordinaten y im Kreise $yy = 2ax - xx$ zu finden.**

Auflösung.

§. 47. Aus der gegebenen Gleichung ergibt sich, dafs $= 2a$ des Kreises Durchmesser AB (Fig. 28.) ist, auf welchem wir (von A aus nach B hin die bejahten Abscissen nehmen (§. 3.). Die gegebne Kreisgleichung unentwickelt differenziirt, gibt $2ydy = 2adx - 2xdx$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y}$ [$= o$ für $x = a$, folglich $y = \mp a$]

Auch der zweite Differentialquotient wird hier am bequemsten gefunden, wenn man statt $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y}$ die Gleichung $y.\frac{dy}{dx} = a-x$ differenziirt, wodurch man $y.\frac{ddy}{dx} + \frac{dy}{dx}.dy = -dx$, also den zweiten Quotienten $\frac{ddy}{dx\,dx} = -\frac{1}{y} - \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}.\frac{dy}{dx}$ erhält.

auf $\frac{dy}{dx} = o$, also auf $y = \mp a$ eingeschränkte Werth desselben heifse $\frac{(ddy)}{dxdx}$, so haben wir 1) $\frac{(ddy)}{dx\,dx} = -\frac{1}{+a} - \frac{1}{+a}.o.o = -\frac{1}{a}$ für $y = +a$ und 2) $\frac{(ddy)}{dxdx} = -\frac{1}{-a} - \frac{1}{-a}.o.o = +\frac{1}{a}$ für $y = -a$; folglich $y = +a$ ein Maximum, und $y = -a$ ein Minimum. (§. 39.)

Jenes bejahte $y = a$ ist die dem obigen $x = a = AC$ zugehörige bejahte Ordinate CE, und das verneinte $y = -a$ die derselben Abscisse $x = AC$ zugehörige verneint gerichtete Ordinate C$\mathfrak{E}$.

Vollkommen richtig wird hier durch die Regel §. 39. No. 2, entschieden, dafs in der Reihe der bejahten Ordinaten $y = +\sqrt{2ax - xx}$ die $y = a = CE$ eine gröfste, in der Reihe der verneinten Ordinaten $y = -\sqrt{2ax - xx}$ dagegen die $y = -a = C\mathfrak{E}$ eine kleinste ist; indem sie mehr Verneintes als ihre Nachbaren enthält.

Zusatz 1.

§. 48. Wenn für denselben Kreis (Fig. 28.) die Abscissenlinie um $AG = -b$ vertieft, und der nunmehrige Abscissen-Anfang in G genommen wird: so sind für jeden Punct M und $\mathfrak{M}$ des Kreises die neuen

Abscissen $GQ = x$ den vorigen x an Gröfse und an Richtung gleich.

Was aber die neuen Ordinaten QM (auch QM) betrifft: so ist M mag seyn, welcher Punct des Kreises es will,

allemal $PM + MQ = PQ = AG = -b$,

das ist $y - QM = -b$; also $y = QM - b$.

Demnach hat man für die neuen Ordinaten die Gleichung $(QM - b)^2 = 2ax - xx$; und wenn man nunmehr auch die neuen Ordinaten QM wiederum y nennt, so hat man die Kreisgleichung

$(y-b)^2 = 2ax - xx$. Diese Gleichung gibt nun $2(y-b)\,dy = 2a\,dx - 2x\,dx$,

also $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y-b}$ [$= 0$ für $x = a$]

und $\frac{ddy}{dxdx} = -\frac{1}{y-b} - \frac{1}{y-b} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx}$. Dieser allgemeine Werth des zweiten Differentialquotienten auf $\frac{dy}{dx} = 0$, also auf $x = a$, und die diesem x zugehörigen y eingeschränkt, gibt $\frac{ddy}{dxdx} = -\frac{1}{y-b}$. Da nun überhaupt $y - b = \mp\sqrt{2ax - xx}$, also $y = b \mp a$ ist, nach der Zeichnung aber in absoluter Gröfse $GA = b > a$ ist: so sind hier beide Ordinaten-Reihen bejaht.

Da sich aber für das eine $y = b + a$, das $\frac{ddy}{dxdx} = -\frac{1}{+a}$, $\frac{1}{a}$, verneint ergibt, so mufs dieses $y = b + a = SE$ ein Maximum seyn; indefs sich dagegen für das andere $y = b - a$ das $\frac{ddy}{dxdx} = -\frac{1}{-a}$, bejaht ergibt, und somit dieses $y = b - a = S\mathfrak{E}$ als Minimum bestätigt wird.

Zusatz 2.

§. 49a. Zur heilsamen Uebung in der algebraisch-geometrischen Richtungs-Lehren mag man auch die Abscissenlinie um AH $=$ b über dem Durchmesser AB erhöht fordern. Dadurch müssen, wiederum b $>$ a genommen, die Ordinatenreihen $= -b \mp \sqrt{2ax - xx}$ beide verneint sich ergeben. Vollkommen richtig wird man nun auch in dieser Lage der Aufgabe durch den $\begin{matrix}\text{bejahten}\\\text{verneinten}\end{matrix}$ Werth des zweiten Differentialquotienten die $\begin{matrix}\text{verneint gerichtete KF für ein Minimum}\\\text{verneint gerichtete KE für ein Maximum}\end{matrix}$ anerkannt finden; wiederum dem von uns als nothwendig behaupteten algebraischen Sprachgebrauche gemäfs, dafs unter den verneint gerichteten Linien diejenige die gröfste heifsen mufs, welche am wenigsten Negatives in sich hat, und dagegen diejenige die kleinste heifsen mufs, welche das meiste Negative in sich hat.

Anmerkung.

§. 49b. Gesetzt nun auch, es wäre mir nur darum zu thun die längste und die kürzeste unter den Linien zufinden, welche in der geraden Linie AKL ihren Anfang, und in dem Umfange des Kreises ACNF ihr Ende haben, so würde ich dennoch die y der hieher gehörigen Kreisgleichung $yy + 2by = 2ax - xx - bb$ der algebraischen Theorie des Gröfsten und Kleinsten unterwerfen müssen, also die verneint gerichtete KE für ein Maximum, und die verneint gerichtete KD für ein Minimum anerkannt finden müssen: eben daraus aber sogleich zu schliefsen haben, dafs in absoluter Länge die KE eine kleinste, die KD eine gröfste seyn mufs.

Einseitige Gröſste und Kleinste.

§. 50. Die sämmtlichen Puncte in der Kreislinie (Fig. 28.) möge nun

1) durch die Ordinaten $\begin{matrix}PM\\P\mathfrak{M}\end{matrix} = \begin{matrix}+\sqrt{(ax-xx)}\\-\sqrt{(ax-xx)}\end{matrix}$ (§. 47.)

oder 2) durch die Ordinaten $\begin{matrix}QM\\Q\mathfrak{M}\end{matrix} = \begin{matrix}b+\sqrt{(ax-xx)}\\b-\sqrt{(ax-xx)}\end{matrix}$ (§. 48.)

oder 3) durch die Ordinaten $\begin{matrix}IM\\I\mathfrak{M}\end{matrix} = \begin{matrix}-b+\sqrt{(ax-xx)}\\-b-\sqrt{(ax-xx)}\end{matrix}$ (§. 49.)

algebraisch bestimmt werden: in jedem Falle werden hier die Puncte der obern Kreishälfte durch eine ihr eigenthümlich zugehörige Ordinatenreihe, und dagegen die Puncte der untern Kreishälfte durch eine andere, wiederum ihr eigenthümlich zugehörige Ordinatenreihe bestimmt.

Im Falle 1) und 2) und 3) hat in A und in B, die erste Ordinatenreihe (mit dem $+\sqrt{}$) einen kleinsten, die zweite Ordinatenreihe (mit dem $-\sqrt{}$) einen gröſsten Werth, aber nur einen einseitig gröſsten oder kleinsten Werth, weil der in A, nur an der rechten Seite mögliche Nachbaren hat, der in B nur an seiner linken Seite mögliche Nachbaren hat.

§. 50*. In dieser Aufgabe werden die zweiseitigen Eminenzien durch die Forderung $\frac{dy}{dx} = 0$, die einseitigen, durch die Forderung $\frac{dy}{dx} = \infty$ gefunden. In andern Aufgaben ist es umgekehrt. Wie sie in beiden Fällen richtig zu finden und zu unterscheiden seyen, glaube ich in meiner Neuen Methode bündig dargelegt zu haben. Auch in der praktischen Mechanik und Hydraulik u. s. w. drängen sich die einseitigen Eminenzien ein, daher es auch den Praktikern zu wissen nöthig ist, daſs die gewöhnliche Definition der gröſsten und kleinsten Werthe, lediglich von zweiseitigen

abstrahirt, zu enge war. Denen Mathematikern, welche mit ihren bisherigen Ansichten auszureichen meynen, möchte ich als eine ganz einfache und lediglich theoretische Aufgabe vorlegen, die gröfsten und kleinsten Werthe der trigonometrischen Tangente eines veränderlichen Winkels φ durch bündige Schlüsse darzulegen!

Achte Aufgabe.

§. 51. Unter allen Rechtecken, welche im Halbkreise ADB (Fig. 29.) Statt finden, das gröfste PF, vermittelst der Kreisgleichung $yy = aa - xx$ anzugeben.

Auflösung.

§. 52. Da in dieser Gleichung, dessen $a = CM$ jeden Halbmesser bedeutet, die Abscissen $x = CP$ und Ordinaten $PM = y$ sind; so wird durch $x.y$ die Hälfte eines jeden im Halbkreise AFB möglichen Rechteckes $2xy$ angegeben. Da nun das ganze MP ein gröfstes seyn mufs, wenn xy ein gröfstes unter den halben ist: so hat man für die Function $U = xy$ ihren gröfsten Werth zu suchen.

Da sich nun $\frac{dU}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$, aus der Kreisgleichung aber $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ergibt: so hat man, den ersten Differentialquotienten

$$\frac{dU}{dx} = y - \frac{xx}{y} = \frac{yy - xx}{yy}, \quad [= o \text{ für } y = \pm x]$$

Der zweite Differentialquotient wird am bequemsten durch Differenziirung der Gleichung

$yy.\frac{dU}{dx} = yy - xx$ gefunden, welche

$$2y\,dy.\frac{dU}{dx} + yy.\frac{ddU}{dx} = 2y\,dy - 2x\,dx$$

also $yy.\frac{ddU}{dxdx} = 2y\frac{dy}{dx} - 2x - 2y\frac{dy}{dx}.\frac{dU}{dx}$ gibt.

Da es uns nur darauf ankömmt, das $\mp$ des $\frac{ddU}{dxdx}$ für diejenigen x und y zu erfahren, bei welchem $\frac{dU}{dx} = o$ ist, also das letzte Glied der Gleichung sich vernullt; auch der quadratische Factor yy, bei allen möglichen y bejaht, im Zeichen nichts ändert: so brauchen wir nur zu beachten, dafs

$$\frac{ddU}{dxdx} ::: y\frac{dy}{dx} - x = -x - x = -2x \text{ ist.}$$

Also das halbe Rechteck $U = xy$ ein Maximum, welches sich längs einem bejahten x erstreckt, und das andere, welches längs einem negativen x sich erstreckt, ein Minimum!

Vollkommen richtig, und allemal ein solches x genommen, dessen y, es mag bejaht oder verneint seyn, an absoluter Gröfse ihm gleich ist, weil ja die Forderung $\frac{dU}{dx} = o$ ein $y = \pm x$ verlangt hat.

Da wir blofs das gröfste Rechteck im obern Halbkreise AFB verlangt haben: so geht uns dasjenige mit negativen y im untern Halbkreise nichts an.

Und da wir eigentlich wohl nur die absolute Gröfse des Rechteckes im Sinne hatten: so können wir davon Gebrauch machen, dafs eben deshalb weil die negative Hälfte desselben ein negatives Kleinstes ist, ihre Gegengröfse, in QF anfangend, in CD beendigt, ein bejahtes Gröfstes seyn mufs; daher FC + CG das gesuchte gröfste Rechteck seyn mufs.

Anmerkung 1.

§. 53. Mit solchen Wirkungen des algebraischen $\mp$ mufs man Bescheid wissen, wenn man nicht in verwickelten Fällen aus einer Schwierigkeit in die andere verfallen will. Hätte ich die Kreisgleichung $yy = 2ax - xx$ befolgt: so wären wir auf **diese** Erörterungen nicht zugekommen. Denn hier ist das ganze Rechteck $QG = QD.QF = (2a - 2x)y = 2y(a-x)$.

Also $U = 2y(a-x)$ gesetzt,

$\frac{dU}{dx} = -2y + 2(a-x)\frac{dy}{dx}$. Aus der Kreisgleichung $2y\,dy = 2a\,dx - 2x\,dx$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y}$ gefunden,

$\frac{dU}{dx} = -2y + \frac{2(a-x)^2}{y}$ [$= 0$ für $y = a-x$].

Da nun $yy \cdot \frac{dU}{dx} = -2yy + 2(a-x)^2$ differenziirt uns $2y\,dy \cdot \frac{dU}{dx} + yy \cdot \frac{ddU}{dx} = -2y\,dy = 4(a-x)\,dx$, für $\frac{dU}{dx} = 0$ also, welches $y = a-x$ fordert, uns $\frac{ddU}{dx^2} ::: -8(a-x)$ gibt; so würde man sagen, dafs für $x = AQ$, kleiner als a, der zweite Differentialquotient uns versichert, ein gröfstes Rechteck QF zu haben; welches allerdings richtig ist.

Aber es könnte ja auch $x = AP$ behauptet werden, welches gröfser als a ist, und daher den Werth des $\frac{ddU}{dx^2}$ bejaht bestimmt? Hier ist die einzig richtige Antwort, dafs dann das Rechteck in PG **seinen** Anfang nimmt, und längs der **verneint gerichteten** Grundlinie, bei bejahter Höhe $+y = PG$ ganz richtig eine algebraisch verneinte Fläche ausmacht.

Anmerkung 2.

§. 54. Gesetzt es würde das gröfste Rechteck im ganzen Kreise zu finden verlangt, so würde doch die letzte Kreisgleichung $yy = 2ax - xx$ uns nur die eine Hälfte im obern Halbkreise als ein bejahtes Gröfstes anzugeben vermögend seyn, die andere Hälfte desselben im untern Halbkreise als ein verneintes Kleinstes dann angeben müssen! Die hieher gehörige Erörterung ist aus dem vorigen einleuchtend. Wollte man ihrer nicht nöthig haben, so müfste eine Kreisgleichung angelegt werden, deren Abscisse wenigstens um $= a$ unter der vorigen gelegen wäre.

Neunte Aufgabe. (Fig. 30.)

§. 55. Es ist gegeben des Punctes E Lage gegen die beiden Schenkel eines rechten Winkels BAD; man verlangt die kürzeste Linie GEB zu finden; z. B. den kürzesten Communicationsweg FG, durch welchen man mit Benutzung der Landstrafsen DB und BA, aus D nach B, den Ort E mit treffend, gelangen kann.

Auflösung.

§. 56. Die genannte Lage des Punctes E ist gegeben, wenn dessen Entfernungen $NE = b$ und $EM = a$ gegeben sind. Werde nun noch $FN = x$ und $FG = y$ genannt, so hat man die
Proportion $FN : FA = FE : FG$
durch $x : x + a = \sqrt{(x^2 + b^2)} : y$ benannt.

Also $y = (b^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + ax^{-1})$, folglich

$$\frac{dy}{dx} = \left(1 + \frac{a}{x}\right) \cdot (b^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x - \frac{a}{x^2} (b^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

also $\frac{dy}{dx} = 0$, wenn $(a + x)x^2 = a(b^2 + x^2)$,

also $x^3 = abb$, folglich $x = \sqrt[3]{abb}$ genommen wird. *) Will man sich die Mühe nehmen auch $\frac{ddy}{dxdx}$ zu finden, so wird dessen Werth auf $x = \sqrt[3]{abb}$ eingeschränkt, sich bejaht ergeben, und dadurch bestätigen, dafs durch dieses x ein kleinstes y bestimmt ist.

Kürzere trigonometrische Auflösung.

§. 57. Es werde $NFG = \varphi$, dieser Winkel gesucht, dafs $U = FE + ED = \frac{1.b}{\sin\varphi} + \frac{1.a}{\cos\varphi}$ ein Kleinstes sey, so hat man $U = b.\sin\varphi^{-1} + a.\cos\varphi^{-1}$

also $\frac{dU}{d\varphi} = -\frac{b}{\sin\varphi^2}.\cos\varphi + \frac{a\sin\varphi}{\cos\varphi^2}$ $\left[= o \text{ für } \sin\varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right]$

Die Gleichung $\sin\varphi^2.\cos\varphi^2.\frac{dU}{d\varphi} = -b\cos\varphi^3 + a\sin\varphi^3$

gibt $\frac{dU}{d\varphi}.\frac{d(\sin\varphi^2.\cos\varphi^2)}{d\varphi} + \sin\varphi^2.\cos\varphi^2.\frac{ddU}{dxdx}$

$= +3b\cos\varphi^2\sin\varphi + 3a\sin\varphi^2\cos\varphi$

Für $\frac{dU}{d\varphi} = o$ fällt das erste Glied weg; und da $\sin\varphi^2.\cos\varphi^2$ bejaht ist: so hat man $\frac{ddU}{dxdx} :: b.\sin\varphi$

---

*) Die Gleichung $xxx = abb$ in die Propottionen $b : x = : x\frac{xx}{b} = \frac{xx}{b} : \frac{xxx}{bb}$ aufgelöfst, legt vor Augen, dafs x zwischen b und $a = \frac{xxx}{bb}$ die zweite mittlere Proportionale ist, welche geometrisch am bequemsten durch Kreis- und Parabel-Section kann gefunden werden. Diese Sectionen zu kennen hat für die biquadratischen und kubischen Wurzeln auch calculatorischen Nutzen; obgleich sich jede Kubikwurzel durch Rechnung weit genauer und leichter als durch Geometrie finden läfst.

$+ a \cos\varphi$; also wenn φ ein spitzer Winkel ist, bejaht, und FG ein Kleinstes.

Anmerkung.

§. 53. Die Aufgabe könnte mit solchen Forderungen abgefaſst werden, daſs der Winkel φ ein stumpfer seyn, und der zweite Differentialquotient die gefundene Eminenz FG für ein verneintes Maximum erklären müſste, welche dann dessen ungeachtet, wo es auf die trigonometrisch verneinte Richtung nicht ankommt, in ihrer absoluten Gröſse als ein Minimum zu behandeln seyn würde.

Zwischen mehren Orten die vortheilhaftesten Communicationswege zu finden, würde merkwürdige Auflösungen veranlassen, die aber nur durch Functionen mit zwei Veriabeln, als solchen, zu behandeln rathsam wäre.

Zehnte Aufgabe.

§. 54. Eine gegebne Masse $= A$ Kubikfuſs, soll in die Gestalt eines rechtwinklichen Parallelepipedi gebracht werden, und dabei so wenig Oberfläche als möglich haben. Welche Dimensionen muſs man dem Parallelepipedo geben?

Auflösung.

§. 55. Seine drei Dimensionen seyen x, y, z, so weiſs man

I) daſs $xyz = A$ seyn muſs. Heiſse ferner U die halbe Umfläche des Parallelepipedi, so hat man

II) $U = xy + xz + yz$, welches ein Kleinstes seyn soll.

Aus I) läſst sich $z = \frac{A}{xy}$ folgern, und dies in II)

gebracht, giebt die Gleichung III) $U = xy + \frac{A}{y} + \frac{A}{x}$, woraus sich ergiebt

1) $\frac{{}^{x}dU}{dx} = y - \frac{A}{xx}$, wenn man blos die x belegt hat;

2) $\frac{{}^{y}dU}{dy} = x - \frac{A}{yy}$, wenn man blos die y belegt hat.

Soll nun von diesen beiden Differentialquotienten jeder $= o$ seyn, so mufs

1) $y - \frac{A}{xx} = o$, und 2) auch $x = \frac{A}{yy} = o$ seyn.

Aus 1) folgt $y = \frac{A}{xx}$ und dieses in 2) gebracht, gibt $x - \frac{Axxxx}{AA} = o$, also $x = \sqrt[5]{A}$, folglich auch $y = \frac{A}{\sqrt[3]{A}.\sqrt[5]{A}} = \sqrt[3]{A}$, und demnach auch $z = \frac{A}{xy} = \frac{A}{\sqrt[5]{A}.\sqrt[5]{A}} = \sqrt[5]{A}$.

Hiemit wissen wir nun, dafs $x = y = z = \sqrt[3]{A}$ gesetzt werden mufs, wenn 1) $\frac{{}^{x}dU}{dx} = o$, und 2) auch $\frac{{}^{y}dU}{dy} = o$ seyn soll. Da nun ferner überhaupt $\frac{{}^{x}d{}^{x}dU}{dxdx} = 2\frac{A}{y^3}$ ist, bei nicht belegtem y; und $\frac{{}^{x}d{}^{x}dU}{dydy} = 2\frac{A}{y^3}$ ist, bei unbelegtem x: so sehen wir, dafs für $x = y = \sqrt[5]{A}$, die beiden zweiten Differentialquotienten einen bejahten Werth angeben; durch $x = \sqrt[3]{A}$ also ein kleinstes U erhalten wird, in so weit es vom x abhängt, bei jedem Werthe des y; auch durch $y = \sqrt[3]{A}$ ebenfalls ein kleinstes U geliefert

wird, in so weit dieses durch y bewirkt werden kann, bei jedem Werthe des x.

Hiedurch sind wir allerdings nun gewiſs geworden, daſs im $x = y = \sqrt[5]{A}$ genommen, die beiden veränderlichen Gröſsen x und y gemeinschaftlich wirken, um ein zweifaches Minimum einzuliefern. Und da durch $x = y = \sqrt[3]{A}$ auch $z = \frac{A}{xy} = \sqrt[3]{A}$ bestimmt wird: so sind wir allerdings versichert, daſs der Kubus eine kleinste Oberfläche hat.

(Eine allgemeine Ueberschauung dieses Verfahrens kann erst späterhin mitgetheilt werden, wenn wir auch die dazu nöthigen allgemeinen Vergleichungen zwischen den partiellen Differentialen zweifach variabler Functionen werden beigebracht haben.)

Eilfte Aufgabe.

§. 56. Eine gegebne Masse A soll cylindrisch geformt werden; welchen Cylinder muſs man wählen, daſs die Oberfläche ein Kleinstes sey?

Auflösung.

Daſs man unter den geraden Cylindern wählen müsse, ist sehr einleuchtend. Ein schiefer kann das verlangte Minimum der Oberfläche nicht haben, weil ein gerader von derselben Grundfläche und Höhe neben ihm gedacht, einerlei Inhalt mit ihm, und doch eine kleinere Umfläche haben würde.

Sey eines geraden Cylinders Halbmesser $= x$, und Höhe $= y$; so ist dessen Grundfläche $= \pi xx$ und sein Inhalt $= \pi xxy$; wobei wir nun

I) wissen, daſs $\pi xxy = A$ seyn muſs, und

II) seine Umfläche $U = 2.\pi xx + 2\pi xy$ ein Kleinstes soll.

Da nun $\frac{dU}{dx} = 4\pi x + 2\pi y + 2\pi x \frac{dy}{dx}$ ist, aus I) aber folgt, dafs $2\pi xy\,dx + \pi xx\,dy = 0$ also $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}$ seyn mufs, so haben wir auch $\frac{dU}{dx} = 4\pi x - 2\pi y$ [also $= 0$, für $y = 2x$].

Ferner ist $\frac{ddU}{dxdx} = 4\pi - 2\pi\frac{dy}{dx} = 4\pi + 4\pi\frac{y}{x}$, also bejaht, wenn y und x einander gleich bezeichnet angenommen werden.

Da wir nun schon wissen, dafs man um $\frac{dU}{dx} = 0$ zu erhalten, nothwendig $y = 2x$, also auch x und y gleichbezeichnet haben mufs: so ist es gewifs, dafs $\frac{ddU}{dxdx}$ dafür sich bejaht ergibt, und somit die Umfläche $U = 2\pi xx + 5\pi xx$ als eine Kleinste bestätigt wird.

Anderer Calcul.

§. 57. Aus I) folgt $y = \frac{A}{\pi xx}$, und dieser Werth des y in

II) gebracht, giebt $U = 2\pi xx + \frac{2\pi xA}{\pi xx} = 2\pi xx + 2Ax^{-1}$

Also $\frac{dU}{dx} = 4\pi x - 2Ax^{-2}$ [$= 0$ für $x = \sqrt[3]{\frac{A}{2\pi}}$; also ein bejahtes x, wenn A nicht ausdrücklich verneint gegeben verlangt wird. In der obigen Aufgabe aber wird natürlich dessen absolute Gröfse verstanden.]

Ferner ist $\frac{ddU}{dxdx} = 4\pi + \frac{4A}{xxx}$, also bejaht, und demnach gewifs, dafs das durch $x = \sqrt[3]{\frac{A}{2\pi}}$ bestimmte U ein kleinstes ist.

Aus $x = \sqrt[3]{\frac{A}{2\pi}} = \frac{A^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{1}{3}}}$ ergibt auch hier sich

$y = \frac{A.2^{\frac{2}{3}}.\pi^{\frac{1}{3}}}{\pi.A^{\frac{2}{3}}} = 2\sqrt[3]{\frac{A}{2\pi}} = 2x$, wie vorhin.

Anmerkung.

§. 58. Für Münzen eine offenbar unschickliche Form! von der man sich andrer Ursachen wegen beträchtlich entfernen mufs. Aber man verzeichne sich etwa die Curve für $U = 4\pi x - \frac{2A}{xx}$, so dafs x die Abscissen, und U ihre Ordinaten werden: so wird man sehr anschaulich vor Augen haben, dafs es gerade für solche Cylinder, die sich von dem Minimo der Oberfläche schon sehr entfernt haben, wichtig ist, sie nicht unnöthiger Weise noch weiter zu entfernen; weil dann durch eine kleine weitere Entfernung, ihre Oberfläche sehr vergröfsert wird. (In meiner Kenntnifs und Betrachtung des neuern Münzwesens 1796. S. 95. findet man mehr darüber beigebracht.)

Zwölfte Aufgabe.

§. 59. Körner, Mehl und Getränke u. dergl. zu messen, braucht man hohle Cylinder, die oben offen sind, wobei die Frage vorkommen kann, wie man dergleichen Gefäfse proportioniren müsse, dafs ihr Boden nebst ihrer Seitenwand, nicht viel Material erfordere, indem dieses für etwas grofse Gefäfse aus wohlfeilem Material, doch immer noch den Vortheil hat, dafs die Gefäfse nicht übernöthig schwer ausfallen.

Auch hier wird man zuvörderst nach der höchsten erreichbaren Vollkommenheit, nach dem Minimo

fragen, und dann die Frage hinzufügen, wie weit man sich von der besten Proportion entfernen, und auf welcher Seite man sich am weitesten davon entfernen könne; ohne in eine grofse Entfernung vom Minimo zu verfallen.

Auflösung.

Der gegebne Inhalt sey $=A$, und x der Halbmesser, y die Höhe des cylindrischen Raumes, so ist

I) $\pi xxy = A$, wie vorhin. Aber die materielle Begränzung der Gefäfse, die aus dem Boden und der Seitenwand besteht, durch W benannt, ist

II) $W = \pi xx + 2\pi xy$;

folglich $\frac{dW}{dx} = 2\pi x + 2\pi y + 2\pi x\frac{dy}{dx}$.

Aus I) wie in §. 56. gefolgert, dafs $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}$ ist, gibt $\frac{dW}{dx} = 2\pi x - 2\pi y$ [also $= o$ für $x = y$.]

Ferner $\frac{ddW}{dxdx} = 2\pi - 2\pi\frac{dy}{dx} = 2\pi + 4\pi\frac{y}{x}$, also bejaht für $y = x$, und demnach bestätigt, dafs dieses W eine kleinste Umfläche ausmacht.

Anderer Calcul.

§. 60. Aus I) folgt $y = \frac{A}{\pi xx}$, welches in II) gebracht gibt $W = \pi xx + \frac{2\pi xA}{\pi xx} = \pi xx + 2Ax^{-1}$.

Also $\frac{dW}{dx} = 2\pi x - 2Ax^{-2}$ $\left[\text{also} = o \text{ für } x = \sqrt[3]{\frac{A}{\pi}}\right]$.

Auch $\frac{ddW}{dxdx} = 2\pi + \frac{4A}{xxx}$, für $x = \sqrt[3]{\frac{A}{\pi}}$ also bejaht.

§. 61. Für diese Aufgabe ist also der Cylinder ein solcher, dessen Höhe und Halbmesser einander

gleich sind. Eine Form, die z. B. für Metzen und Scheffel sehr geschickt, und ohne alles weitere Bedenken zu gebrauchen ist, wo abgestrichen, nicht etwa gehäuft wird. In letzterer Hinsicht müſste doch die einmal eingeführte polizeyliche Form mit in Betracht zu ziehen seyn.

Für flüssige Sachen dürfte die Weite dieses Cylinders zu groſs gegen seine Höhe seyn; weil bei solchem Maafse viel darauf ankommt, daſs es völlig horizontal gehalten wird; auch die durch Cohäsion verursachte Abweichung von der obern Ebne bei weiten Gefäſsen gröſsere Fehler als bei den engen veranlassen kann.

Sehr schicklich gebraucht findet man diese Lehren des Gröſsten und Kleinsten in des Herrn Eytelwein Vergleichung der Maafse und Gewichte in den Königl. Preuſs. Staaten. Berlin 1810.

Dreizehnte Aufgabe. (Fig. 31.)

§. 62. Von C, dem mittlern Puncte einer nur kleinen, horizontal gelegenen Ebene GH, ist um DB = b die Verticallinie BA entfernt, in welcher eine Lichtflamme A so hoch gestellt werden soll, daſs die kleine Ebene GH so stark als möglich von dem Lichte erleuchtet werde; man soll die vortheilhafteste Höhe BA des Lichtes finden.

Auflösung.

§. 63. A sey ein mittlerer Punct des brennenden Lichtes, und AE der mittlere von seinen Lichtstrahlen, welche auf eine ihm normal gestellte Kreisfläche DF⊙ treffend den Strahlenkegel DAF bilden, von dessen Strahlen die Kreisfläche DF⊙ mit einer gewissen

Helligkeit L erleuchtet wird, die wir sehr schicklich als Maafseinheit für die übrigen Helligkeiten gebrauchen können, wenn wir, alle Längen nach Zollen gemessen, die Entfernung $AE = 1$ Zoll genommen fordern.

Wenn nun in der gröfsern Entfernung AC wiederum eine auf AC normale Kreisfläche $IK\odot$ gedacht wird, welche dort die sämmtlichen Strahlen des Lichtkegels DAF aufzufangen gerade grofs genug wäre; so würde diese $IK\odot = \frac{AC\square}{AE\square} . DF\odot$ seyn müssen. Indem sich nunmehr die Strahlen des Lichtkegels auf eine $\frac{AC\square}{AE\square} = \frac{AC\square}{1.\ 1}$ mal gröfsere Ebene vertheilen müssen, so behauptet man, dafs (im Durchschnitt genommen ein einzelner Theil dieser $IK\odot$ Ebene nur noch die Helligkeit $\frac{AE\square}{AC\square} L$ hat; dem bekannten optischen Lehrsatze gemäfs, dafs die Stärke des Lichtes, die Dichtigkeit der Lichtstrahlen, den Quadrirten Entfernungen umgekehrt proportional ist, vorausgesetzt, dafs auf die beiderlei Ebenen in diesen verschiedenen Entfernungen die Lichtstrahlen unter einerlei Winkel auffallen, nach unserer normalen Stellung der beiden kleinen Ebenen also hauptsächlich unter dem rechten, und andern nicht viel davon abweichenden Winkeln, auffallend sind.

Indem aber dieser Einfallswinkel für die Ebene IK ein rechter Winkel, für die Ebene GH dagegen ein kleinerer Winkel $ACB = \varphi$ ist, so tritt ein zweiter bekannter Lehrsatz ein, dafs die Dichtheit der Lichtstrahlen bei einerlei Entfernung AC vom leuchtenden Puncte dem Sinus des Einfallswinkels, also hier hauptsächlich dem $\sin\varphi$ proportional ist; dem gemäfs also die kleine Ebene GH, indem sie, wie die IK die sämmtlichen Strahlen des Lichtkegels auffängt, in ih-

ren einzelen Theilen, und im Durchschnitt genommen, nur noch die Helligkeit $\frac{AE^{\square}}{AC^{\square}}$, sin φ, L hat.

Diesen zweiten Lehrsatz können wir hier auch durch folgende Betrachtung gewinnen. Da die Ebene GA eine Ellipse ist, welche des Kreises IK$\odot$ Halbmesser CI $=$ CK zur halben kleinen Axe, und die CG $=$ CH zur halben grofsen Axe hat: so mufs diese Ellipse (wie es in der Integralrechnung erwiesen wird,) $= \frac{CH}{CK}$. IK$\odot$ seyn. Es kann sich daher auf dieser gröfseren elliptischen Ebene die Helligkeit im Durchschnitte nur $= \frac{AE^{\square}}{AC^{\square}} \cdot \frac{CK}{CH}$. L ergeben.

Da nun schon AE $=$ 1 gesetzt, und AC $=$ b, sec φ $= \frac{b}{\cos. \varphi}$ ist, ferner $\frac{CK}{CH} = \frac{\sin \varphi}{1}$ ist, so hat man die Helligkeit auf der elliptischen kleinen Ebene $=$ F genannt, $F = \frac{L}{bb} \cdot \cos \varphi^2 . \sin \varphi$; welche ein Gröfstes seyn soll.

Den constanten Factor $\frac{L}{bb}$, welcher auf die Bestimmung des vortheilhaften φ keinen Einfluss hat, weggelassen, findet man den ersten Differentialquotienten $\frac{dF}{d\varphi} = \cos \varphi^2 . \cos \varphi . \sin \varphi^2$, hat ihn also $= 0$ nicht nur 1) für $\cos \varphi = 0$, sondern auch 2) für $\cos \varphi^2 = 2 . \sin \varphi^2$, also für $\frac{\sin \varphi^2}{\cos \varphi^2} = \frac{1}{2}$, das ist für tang. $\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}}$, also ungefähr für tang $\varphi = \sqrt{0,5}$ $= 0,70711$, das ist für $\varphi = 35° 15' 52''$.

Der zweite Differentialquotient ist

$$\frac{ddF}{d\varphi^2} = 3 \cos \varphi^2 . \sin \varphi - 4 . \cos \varphi^2 . \sin \varphi + 2 . \sin \varphi^3 ;$$

hat für $\frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2} = \frac{1}{2}$ einen verneinten Werth, zur Bestätigung, dafs man dadurch eine gröfste Helligkeit erhalte. Für den ersten Werth $\cos\varphi = 0$ würde der zweite Differentialquotient den bejahten Werth $2.\sin 90^\circ = 2$ erhalten, und dadurch bestätigen, dafs für $\varphi = 90$ Grad, wobei die Erhöhung des Lichtes BA unendlich grofs geworden seyn müfste, die Erleuchtung der Ebene ein Kleinstes geworden seyn müfste. (Sehr absichtlich behaupte ich hier das Gewordenseyn; denn Tangente und Secante eines rechten Winkels sind keine noch unendlich grofs werdende, sondern vollgrofs gewordene Linien.)

Aber wenn der erste Differentialquotient $\frac{dF}{d\varphi}$ durch seinen einen Vernullungswerth des $\varphi = 90$ Grad bestimmt, und dafür durch den bejahten Werth des $\frac{ddF}{d\varphi^2}$ die bewirkte Erleuchtung als ein Kleinstes bestätigt wird; warum wird nicht auch $\varphi = 0$ bestimmt, da doch bei dieser Stellung des leuchtenden Punctes A die Erhellung der horizontalen Ebene, geometrisch betrachtet, sich vernullt haben, also wiederum eine kleinste Erleuchtung geworden seyn mufs!

Ich erwiedere, dafs wir uns mit unsern algebraischen Gleichungen sammt dem algebraisch trigonometrischen bejahten Halbmesser $= +1$ den Regeln der Algebra unterworfen haben, und diesen gemäfs ist jene Helligkeit $= 0$ kein Kleinstes. Algebraisch trigonometrisch wird hier durch $\frac{dF}{d\varphi} = 0$ mittelst des $\cos\varphi = 0$ nicht nur I) $\varphi = +90$ Grad, sondern auch II) $\varphi = -90$ Grad bestimmt, ferner durch $\tang\varphi = \frac{1}{2}$ nicht nur III) $\varphi = +35^\circ\ 15'\ 52''$, sondern auch IV) $\varphi = -35^\circ\ 15'\ 52''$ bestimmt; und so ergiebt sich die Erleuchtung der Ebene GH für das Ite $\varphi = +90^\circ$

als ein bejahtes **Minimum**, für das IIte $\varphi = +35°\,15'\,52''$ als ein bejahtes **Maximum**, für das IIIte $\varphi = -35°\,15'\,52''$ als ein verneintes **Minimum**, für das IVte $\varphi = -90°$ als ein verneintes **Maximum**.

Indem nun die gesuchte Erleuchtung für $\varphi = 35°\,15'\,52''$ ein bejahtes Maximum ist, so wird sie, indem φ bis auf $= 0°$ abnimmt, immerfort kleiner, bis mit $\varphi = 0°$ sie selbst auch 0 geworden ist, und indem φ von $= 0°$ bis zu $\varphi = -35°\,15'\,52''$ hin fernerhin algebraisch kleiner wird, so wird auch die Erleuchtung fernerhin algebraisch kleiner, daher die Erleuchtung $= 0$ für $\varphi = 0°$ zur einen Seite gröfsere, zur andern Seite kleinere Nachbarn hat, also keine algebraische Eminenz ist.

Verneinte Erleuchtung ist hier Erleuchtung an der entgegengesetzten Seite der Fläche GH unter übrigens gleichen Umständen.

Anmerkung.

§. 64. Absichtlich habe ich die Auflösung dieser Aufgabe etwas sorgfältig darstellen wollen; weil ich bei andern z. B. in Mako Calc. differ. et integr. Wien 1768. S. 69. das vortheilhafte $\varphi = 45°$, nicht $= 35°\,15'\,52''$ gefunden sehe; obgleich ich ebenfalls nur die beiden gewöhnlichen (nur im Durchschnitt hinreichend zutreffenden) optischen Lehrsätze befolgt habe, dafs die Stärke oder Dichtheit der Lichtstrahlen auf eine gewisse kleine Ebene fallend den quadrirten Entfernungen umgekehrt, und dem Sinus des Einfallswinkels geradezu proportional sey.

Vierzehnte Aufgabe.

§. 65. Wenn eine elastische Kugel, deren Masseninhalt $= A$ ist, mit der Geschwindigkeit $= c$ auf

eine andere elastische Kugel $= B$ centrisch stiefse: so würde (nach den bekannten gewöhnlichen Gesetzen für den plötzlichen Stofs zwischen vollkommen elastischen Körpern) der bis dahin ruhenden B die Geschwindigkeit $\frac{2A}{A+B} \cdot c$ mitgetheilt werden. Man frägt wie grofs eine dritte Kugel z seyn müsse, damit jener Stofs, vermittelst der z ebenfalls centrisch der B mitgetheilt, die Geschwindigkeit dieser B nun gröfser, als bei dem vorigen unmittelbaren Stofse, und so grofs als möglich ausfalle!

Auflösung.

§. 66. Indem auch z den Massaeninhalt angibt, so mufs die nach obigen Gesetzen ihr mitgetheilte Geschwindigkeit $v = \frac{2A}{A+z} \cdot c$, und daher die Geschwindigkeit der dritten Kugel B durch u bedeutet, $u = \frac{2z}{z+B} \cdot v = \frac{4Az \cdot c}{(A+z)(B+z)}$ also u eine Function des z seyn, deren gröfster durch z erreichbarer Werth zu finden ist.

Ihr Differentialquotient wird am bequemsten gefunden, wenn wir die Gleichung
$(A+z)(B+z) \cdot u = 4 \cdot Acz$ differenziiren, welche
$(A+z)(B+z)du + (A+B+2z)u \cdot dz = 4Acdz$,
also $(A+z)(B+z)\frac{du}{dz} = 4Ac - (A+B+2z)u$, ⊙)
also $\frac{du}{dz} = 0$ gibt, wenn $(A+B+2z) \cdot \frac{4Azc}{(A+z)(B+z)} = 4Ac$,
also $(A+B+2z)z = AB + (A+B)z + zz$; also $zz = AB$,
folglich $z = \sqrt{AB}$, die mittlere Proportionale zwischen der gegebenen A und B ist.

Die Gleichung ⊙) des ersten Differentialquotienten aufs neue differenziirt und durch dz dividirt,

gibt $(A+z)(B+z)\frac{ddu}{dzdz}+(A+B+2z)\frac{du}{dz}=$

$$-(A+B+2z)\frac{du}{dz}-2u;$$

für $\frac{du}{dz}=0$, durch $z^1=\gamma AB$ und $u^1=\frac{4A\gamma AB.c}{(A+\gamma AB)(B+\gamma AB)}$

also $[(A+\gamma(AB)(B+\gamma AB)]^2.\frac{ddu}{dzdz}=-8.A\gamma AB.c;$

also der zweite Differentialquotient verneint, und demnach u^1 ein gröfstes u.

Diese vermittelst einer Zwischenkugel $=\gamma AB$ der dritten Kugel B mitgetheilte Geschwindigkeit u^1, wird nun auch gröfser als die in der Aufgabe erwähnte unmittelbar in ihr bewirkbare Geschwindigkeit seyn, das ist

$$\frac{4A.\gamma AB}{(A+\gamma AB)(B+\gamma AB}c>\frac{2A.c}{A+B}\text{ seyn,}$$

wenn $2(A+B)\gamma AB>(A+\gamma AB)(B+\gamma AB)$

d. i. $2(A+B)\gamma AB>AB+B\gamma AB+A\gamma AB+AB$

also wenn $A+B>2\gamma AB,$

also auch $A^2+2AB+B^2+4AB$

also $A^2-2AB+B^2>0$, also A gröfser als B ist.

Zusatz 1.

§. 67. Die Geschwindigkeit u der letzten Kugel würde also aufs neue verstärkt werden, wenn man 1) zwischen A und z eine neue Kugel $=\gamma(Az)$, oder auch zwischen z und B noch eine neue $=\gamma(z.B)$ einlegte; und beide eingelegt würden sich diese Verstärkungen sogar einander multipliciren.

Zusatz 2.

§. 68. Gesetzt, man habe aufser der gröfsten A noch 10 Kugeln aneinander liegend, von denen jede die mittlere Proportionale zwischen ihren beiderseiti-

Nachbarn wäre, und der Bruch e sey der Exponent dieser geometrischen Reihe: so hätte man die 11 Kugeln als A; Ae; Ae^2; ..... Ae^9; Ae^{10} auf einander folgend; also $=c$ die Geschwindigkeit der ersten genannt, dann die Geschwindigkeit der zweiten $= \frac{2A}{A+Ae} \cdot c = \frac{2c}{1+e}$, die Geschwindigkeit der dritten $= \frac{2Ae}{Ae+Ae^2} \quad \frac{2c}{1+e} = \frac{2^2}{(1+e)^2} c$, der vierten Geschwindigkeit $= \frac{2^3}{(1+e)^3} . c$, sonach $= \frac{2^{10}}{(1+e)^{10}} . c$ die Geschwindigkeit der letzten 11ten Kugel B, und diese $B = e^{10} A$. Wäre daher $A = 1000 B$ gegeben, so hätte man $e^{10} = \frac{1}{1000}$ und demnach $e = \sqrt[10]{0{,}001}$, eine so kleine Gröfse, dafs man $(1+e)^{10}$ wenig gröfser als $= 1$, also die letzte Geschwindigkeit ziemlich nahe $= 2^{10} . c = 4^5 c = 1024 . c$ hätte.

Genauer gerechnet würde man die letzte Geschwindigkeit gerade $= 1000 . c$ finden müssen. Denn da die letzte Kugel 1000 mal kleiner als die erste ist, so mufs die erste eine 1000 mal gröfsere Geschwindigkeit in der letzten bewirken können; vorausgesetzt, dafs wegen der vorausgesetzten vollkommenen Elasticität der Kugeln bei Mittheilung der Bewegung nichts verloren gehe, auch wegen der übrigen idealischen Voraussetzungen kein anderer Bewegungsverlust in Anschlag zu bringen sey.

Unter solchen Voraussetzungen würde also, wenn die Geschwindigkeit der ersten Kugel 2 Fufs wäre, die Geschwindigkeit der letzten 11ten Kugel 2000 Fufs seyn. Durch die stärkste Ladung der Kanonen weifs man ihren Kugeln wenig über 2000 Fufs Geschwindigkeit beizubringen.

Z u s a t z 3.

§. 69. Werden die Kugeln aus gleichartiger Masse, etwa sämmtlich aus gleichartigem Elfenbein verfertigt, so müssen sich auch ihre körperlichen Gröſsen wie $1 : e : e^2 : e^3 : e^4$ und s. w., also ihr Durchmesser wie $1 : e^{\frac{1}{3}} : e^{\frac{2}{3}} : e^{\frac{3}{3}} : e^{\frac{4}{3}}$ und s. w. verhalten, also diese Durchmesser ebenfalls eine geometrische Reihe ausmachen.

Funfzehnte Aufgabe.

§. 70. Ein horizontaler Balken AB, bei A in einem verticalen Ständer eingezapft, soll durch eine Strebe von gegebner Länge $CF = a$ mit unterstützt werden, man frägt, welche Lage der Strebe zu geben sey, damit sie das gröſste Unterstützungsmoment zu leisten vermöge! (Fig. 32.)

A u f l ö s u n g.

§. 71. Wenn auf diese bekannte Frage die gewöhnliche Antwort mit Deutlichkeit und Richtigkeit sich ergeben soll, so muſs unter dem von mir sogenannten Unterstützungsmomente dasjenige statische Moment des zenithwärts gerichteten Gegendruckes FO verstanden werden, mit welchem die Strebe dem Sinken des Balkens in F zu widerstehen im Nothfalle vermögen würde. Wenn nun die Linie FK, die Gröſse und Richtung desjenigen Gegendruckes D bedeutet, welchen die Strebe ihrer Stärke und specifischen Festigkeit gemäſs, bei ihrer Länge $CF = a$, und länge derselben zu leisten vermögend seyn würde, und ihre vortheilhafteste Lage durch $AF = x$, und den andern Katheten $AC = y$ gesucht wird; so ist $FO = \frac{y.D}{a}$ der zenithwärts gerichtete Gegendruck,

welchen sie im Nothfalle zu leisten vermögen würde; und ihr Unterstützungsmoment $= X$ genannt, ist

1) $X = x.\frac{y}{a}.D$, welches ein gröfstes seyn soll. Da nun

2) auch $x^2 + y^2 = a^2$, also $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ist: so hat man $a.dX = D(y.dx + x.dy)$, und $a.\frac{dX}{dx} = D\left(y - \frac{xx}{y}\right)$ $= D\frac{yy - xx}{y}$, also den ersten Differentialquotienten $= o$ für $x = y$; und dafür ein **gröfstes** x, weil der zweite Differentialquotient $\frac{ddX}{dx^2}$ :::: *) $\frac{d(yy - xx)}{dx}$ $= 2y\frac{dy}{dx} - 2x = -2x - 2x$, sogar überhaupt, für **jedes bejahte** x sich **verneint** ergibt.

Vom Anfang an trigonometrische Gröfsen gebraucht, $ACF = \varphi$ genannt, und darunter den Bogen dieses veränderlich gedachten Winkels, mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben, verstanden, hat man $AE = a.\sin\varphi$ als das obige x, und das obige $y = AC = a.\cos\varphi$; also $X = a.\sin\varphi.\cos\varphi.D$, also

$$\frac{dX}{d\varphi} = a.D.\left(\cos\varphi\frac{d\sin\varphi}{d\varphi} + \sin\varphi\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\right);$$

das ist $\frac{dX}{d\varphi} = D.a.(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)$ [also $= o$ für $\varphi = 45°$,]

---

*) Das :::: wird gelesen, **zeichengleich** ist. Indem es uns nämlich hier nur darum zu thun ist, von dem zweiten Differentialquotienten zu erfahren, ob er für denjenigen Werth des x und y, bei welchem $\frac{dX}{dx} = o$ wird, bejaht oder verneint sey: so können wir nicht nur die Glieder desselben, welche durch ihren Factor $\frac{dX}{dx}$ vernullt werden, sondern auch noch andere Factoren, welche auf das Zeichen keinen Einflufs haben, geradezu weglassen.

Ferner ist $\frac{ddX}{d\varphi^2} = D.a.2.(-\cos\varphi.\sin\varphi - \sin\varphi.\cos\varphi)$ also für $\varphi = 45°$, ausgemacht verneint und demnach $X = \Gamma\frac{1}{2}.\Gamma\frac{1}{2}.a.D = \frac{1}{2}.aD$ ein gröfstes X.

Anmerkung 1.

Noch etwas kürzer fällt der Calcul freilich aus, wenn man $a = 1$ und $D = 1$ setzt, das heifst, die gegebene a selbst zur lineären, und D selbst zur Gewichts-Einheit annimmt, welches allerdings erlaubt ist, da man für jede verschiedene Art von Gröfsen, welche in der Aufgabe vorkommen, die Einheit nach Belieben annehmen kann. Indessen mögen Anfänger immerhin lieber einige Buchstaben mehr schreiben, um nur die Bedeutung der Gleichungen und ihre Dimensionen-Richtigkeit deutlich vor Augen zu behalten.

Andere Ansicht der vorigen Aufgabe. (Fig. 33.)

§. 72. Von A an, bis wohin der horizontale Balken eingezapft und aufliegend gedacht werde, sey dessen Schwerpunct um $AE = b$ Fufs entfernt, und $= G$ Lb der Theil seines Gewichtes, von welchem man fürchtet, dafs er der Verzapfung ungeachtet den Balken niederwärts treiben möchte: so ist $= b.G$ die Niederwucht, der man entgegen streben will. Soll das vermittelst einer Strebe $CF = a$ im Puncte F geschehen; so mufs man die Gleichung $AF.z = b.G$ beachten, der gemäfs $z = \frac{b.G}{AF}$ sich ergibt, indem z die Gröfse des verticalen Druckes bedeutet, welchen der Balken, vorausgesetzt, dafs er in A oder H zu weichen durch die Einzapfung nicht verhindert würde, gegen eine ihm völlig entgegengerichtete Unterstützung UF ausüben möchte. Dergleichen verticale Unterstützung ist nicht vorhanden, sondern statt dessen soll die

schräge Strebe CF dem Drucke z widerstehen, dessen Gröſse und Richtung die Linie FU bedeuten kann.

Indem nun nach der gewöhnlichen Theorie vom statischen Parallelogramme der Kräfte dieser Druck FU = z sich in die beiden Seitendrückungen FP, und FQ geradezu zu zerlegen vermögen soll*), und dann durch den Widerstand der Strebe und des Balkens vernullt wird; so ist der ganze gegen die Strebe sich ergebende Druck $FP = z.\sec.\varphi = \frac{z}{\cos\varphi} = \frac{b.G}{a.\sin\varphi.\cos\varphi}$ wenn wie vorhin der Winkel $ACF = \varphi$ genannt wird. Wird nun $\varphi = 45°$ genommen, so ist das Product $\sin\varphi.\cos\varphi$ ein Gröſstes (wie wir schon vorhin gesehen haben), folglich der Druck FP gegen die Strebe ein Kleinstes.

Die Strebe wird daher unter $\varphi = 45°$ eingelegt, mit einem geringeren Widerstande, als bei einem gröſseren oder kleineren φ, dem Niedersinken des Balkens Einhalt thun. Obgleich nun bei einer sehr kurz gegebenen Länge a der Strebe, selbst auch dieser kleinste Widerstand $FP = \frac{b.G}{a.\Gamma\frac{1}{2}.\Gamma\frac{1}{2}} = \frac{2.b.G}{a}$ beträchtlich groſs werden könnte; so würde doch uns diese Gröſse an sich keine Sorge zu machen haben, weil man eine kurze Strebe nicht nur mit wenig Kosten sehr stark vorrichten kann, sondern auch bei einerlei Stärke, eine kürzere Strebe stärker als eine längere zu widerstehen vermag.

Aber wenn der kürzeren Strebe wegen der Schwerpunct E, eine beträchtliche Länge FE vom Unterstützungspuncte F gewinnt; so vermag das Gewicht

*) Diese wirklich harte Forderung in der gewöhnlichen Theorie des statischen Parallelogrammes kann durch schicklichere Theorie desselben befriedigend zerlegt werden.

des Balkens = G stark gegen die Verzapfung in H jenseits A zu wuchten; daher man in dieser Hinsicht die gröfste Dauer erhalten würde, wenn die Strebe lang genug genommen würde, um bis zum Schwerpuncte E zu reichen.

Achtzehntes Capitel.

Benutzung der Differentialquotienten zur Ersparung mühsamer Divisionen.

§. 1. Sey $X = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$; man habe gefunden, dafs $x = 1$ eine Wurzel der Gleichung $X = 0$ sey, und wolle über die Vermuthung gewifs werden, ob diese Gleichung noch eine zweite Wurzel $x = 1$ habe: so würde man freilich

$\frac{X}{x-1} = x^4 - 2x^2 + 1$ durch Division finden können, und dann versuchen, ob auch dieser Quotient für $x = 1$ sich vernulle! Da dieses der Fall ist, so ist es eben dadurch gewifs, dafs auch dieser Quotient wiederum durch $x - 1$ theilbar seyn mufs. Durch die wirklich vorgenommene Theilung kann man allerdings nun auch $\frac{X}{(x-1)^2} = x^3 + x^2 - x - 1$ finden; und da auch dieser Quotient für $x = 1$ sich vernullt: so kann allerdings durch eine dritte Division auch

$\frac{X}{(x-1)^3} = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x-1} = x^2 + 2x + 1$ gefunden werden.

Weil nun dieses nicht ferner für $x = 1$ sich vernullt: so ist es nunmehr gewifs, dafs die obige Gleichung $X = 0$ drei gleiche Wurzeln $x = 1$, und

zwar dieser gleichen Wurzeln nur ihrer drei, nicht auch ein viertes $x = 1$ hat.

Zu eben dieser Gewifsheit aber können wir mit Ersparung der mühsamen Divisionen durch einen Gebrauch der Differentialquotienten gelangen, welcher vermittelst der folgenden Bezeichnungen in der Kürze deutlich und anstellig wird.

§. 2. $\overset{x=a}{X}$ oder $\overset{x=a}{U+Z}$ soll bedeuten, dafs wir jedes im X oder auch in U und Z vorkommende x auf den einzelen Werth $x=a$ eingeschränkt verlangen.

Soll dieses bei einer gebrochenen Function im Zähler und im Nenner geschehen, so schreiben wir $\left(\frac{Z}{N}\right)^{x=a}$, und können $\frac{(Z)}{N}^{x=a}$ oder $\frac{Z}{(N)}^{x=a}$ schreiben, falls es nur im Zähler oder nur im Nenner geschehen solle.

Ferner soll $\frac{X}{F} = X'$; $\frac{X}{FF} = \frac{X'}{F} = X''$ und s. w. geschrieben werden; nämlich X' oder X'' soll bedeuten, dafs die Function X bereits einmal, oder auch schon zweimal durch die Function F dividirt seyn soll; dafs also allemal auch $X = X'.F = X''.F.F = X'''.FFF$ seyn mufs, und s. w.

§. 3. Wenn wir uns hier, zum Besten der Anfänger, auch für die Absichten dieses Capitels, und als Vorbereitung zu den späteren allgemeineren Lehren, zweckmäfsig hinreichend, die Bedeutung der Function und ihres Factors F darauf einschränken, dafs X nur eine ganze und rationale Function des x, und F nur ein algebraisch einfacher Factor, ein $F = x - a$ seyn soll: so ist es leicht einzusehen, dafs allemal auch $\left(\frac{dX}{dF}\right)^{x=a} = X'$ seyn mufs.

Denn da $dX = d.X'F = X'dF + F.dX'$,

also $\frac{dX}{dF} = X' + F.\frac{dX'}{dF}$, bei allen Werthen des veränderlichen x ist: so muſs ja diese Gleichung auch für den einzelen Werth $x = a$ ihre Richtigkeit haben. Das heiſst, es muſs

$$\left(\frac{dX}{dF}\right)^{x=a} = X'^{x=a} + F.\frac{dX'}{dF} = X'^{x=a} + o.\left(\frac{dX'}{dF}\right)^{x=a} \text{ seyn.}$$

Da nun bei den hier vorangeschickten Bedingungen, daſs X nur eine ganze und rationale Function des x, und F nur ein algebraisch einfacher Factor der Function seyn soll, sehr einleuchtend ist, daſs das letzte Glied durchaus sich vernullen muſs: so ist hiemit erwiesen, daſs $\left(\frac{dX}{dF}\right)^{x=a} = X'^{x=a}$ seyn muſs.

Beispiel 1.

§. 4. Da $X = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ (das obige X in §. 1.) für $x = 1$ sich $= o$ ergiebt, wir also eben dadurch versichert sind, daſs $F = x - 1$ einen Factor dieses X ausmacht, und der Differentialquotient $\frac{dX}{dx} = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1$ sich ergiebt: so muſs $\left(\frac{dX}{dx}\right)^{x=1} = 5 - 4 - 6 + 4 + 1 = X'^{x=1}$ seyn.

(Den veränderlichen Quotienten $\frac{X}{x-1} = X'$ hat man hierdurch freilich nicht gefunden, sondern nur, was dieser Quotient für den einzelen Werthfall $x = 1$ gibt.)

Da nun aber $X'^{x=1}$ selbst wiederum $= o$ ist, und eben dadurch es gewiſs ist, daſs das allgemeine, ver-

änderliche X', auch ohne dafs wir es kennen, den Factor $F = x - 1$ in sich haben mufs: so können wir weiter schliefsen, dafs

$$\frac{ddX}{dxdx} \overset{(x=1)}{=} 20x^3 - 12x^2 - 12x + 4 \overset{x=1}{=} X''$$ seyn mufs;

das ist $20 - 24 + 4 = X''$. Wiederum $= 0$! Also

auch $$\frac{d^3X}{dx^3} \overset{x=1}{=} 60x^2 - 24x - 12 \overset{x=1}{=} X'''.$$

Da nun dieses $= 60 - 24 - 12$, nicht $= 0$ ist: so ist hiemit gewifs, dafs die Wurzel $x = 1$ nicht öfter als dreimal in dem hier gegebnen $X = 0$ vorkommen kann.

Man sieht hieraus wie man für jede Gleichung $X = 0$, wenn man eine Wurzel $x = a$ gefunden hat, vermittelst der Differentialquotienten auf eine bequemere Weise als durch wiederholtes Dividiren es finden kann, ob diese Wurzel öfter, und wie vielmal sie in der Gleichung vorkomme.

§. 5. Der Quotient $\frac{e^n - 1}{e - 1}$ ergibt sich $\frac{0}{0}$ für $e = 1$. Da es durch diese Vernullung des Zählers gewifs ist, dafs $e - 1$ einen Factor des $e^n - 1$ ausmachen mufs: so kann man e veränderlich, und mit einem Differentiale de belegt gedacht, schliefsen, dafs

$$\left(\frac{d.e^n - 1}{d.e - 1}\right) \overset{e=1}{=} \frac{ne^{n-1}de}{de} \overset{e=1}{=} n.1$$ seyn mufs; wodurch der Werth dieses $\frac{0}{0}$ ohne Division gefunden ist. Im nächsten Capitel aber wird die allgemeine Methode, auch für andere $\frac{Z}{N} = \frac{0}{0}$ brauchbar gelehrt.

(Man sehe den Nachtrag.)

Gedruckt bei Carl Gottlob Gärtner.

Inhalts-Verzeichniſs.

(Sammt den Druckfehlern hinter der Vorrede zu binden.)

Vorerinnerungen.

		Seite
I.	Warnung gegen einige algebraische Behandlungen	III
II.	Gegebne und gesuchte Gröſsen der Algebra, beständige und veränderliche Gröſsen der Analysis	VIII
III.	Unabhängig und abhängig veränderliche Gröſsen. Urbelegte und folglichbelegte veränderliche Gröſsen	X
IV.	Unterscheidung zwischen gliederconvergenten und summatorisch convergenten Reihen .	XI.
V.	Merkwürdige Reihen aus der IIten Form der binomischen Reihe abgeleitet	XXIII
VI.	Geometrische und arithmetische Dimensionen	XXVII
VII.	Unterscheidung zwischen dem werdenden und dem vollgewordenen Unendlichen. Verschiedene Grade des Unendlichen. Gleichzeitige Gleichheit der unendlich werdenden Gröſsen	XXXXI
VIII.	Das relative Verschwinden, und statt dessen das absolute Verschwinden, als einzig nöthiger Grundsatz zur Rechtfertigung der Differential-Methode	L.
IX.	Die Producte aus unendlich groſsen und unendlich kleinen Gröſsen betreffend . . .	LVII
X.	Einige Formeln der algebraischen Trigonometrie	LXVII
XI.	Einige Curvengleichungen, welche in der Folge als bekannt vorausgesetzt werden . .	LXXIV

Differentialrechnung.

		Seite
Cap. I.	Begriffe von Functionen. Einige Beispiele der Differenzenlehre; Differenzen- und Differentialquotient	3
Cap. II.	Differentialquotient, der werdende, der gewordene genaue, formenvollständige, gröſsenvollständige. Calculatorische Erklärung der Differentiale. Vorläufige Erwähnung ihrer dimensorischen und phoronomischen Erklärung .	24
Cap. III.	Werthbestimmung einiger $\frac{0}{0}$ durch gemeine Analysis. Geometrische Rechtfertigung unserer Nullenrechnung. Erörterung über die unendliche Kleinheit der Differentiale und ihre	

Seite

stetige Verschwindung. Ur- und Folgedifferential. Allgemein vorausgesetzte Regel für das ∓ der Urdifferentiale. Constante Urdifferentiale 38

Cap. IV. Dimensorische Erklärung für Differentialquotienten und Differentiale 60

Cap. V. Hypothetisch allgemeine Differenziirungs-Lehren für jede Function von x 68

Cap. VI. Regeln zur bequemen Differenziirung der algebraischen Functionen 67

Cap. VII. Hülfsmittel zum bequemen differenziiren. 1) Differenziiren unentwickelter Functionen. 2) Vom partiellen differenziiren. 3) Differenziirung durch Substitution . . . 76

Cap. VIII. Zweite und noch höhere Differentialquotienten 127

Cap. IX. Differenziirung der nöthigsten Kreisfunctionen 135

Cap. X. Lehren der allgemeinen Logarithmik, mit Hülfe der Differentialrechnung strenge erwiesen 167

Cap. XI. Bequeme Differenziirung logarithmischer Gröfsen 197

Cap. XII. Differenziirung der Exponential-Functionen 205

Cap. XIII. Vergleichung zwischen logarithmischen und trigonometrischen Differentialen, und anderer Gebrauch unmöglicher Factoren . . 216

Cap. XIV. Anwendung der Differentialquotienten zur Bestimmung der Tangenten-Lage . . . 231

Cap. XV. Allgemeiner Ausdruck für alle algebraische und transcendente Functionen 244

Cap. XVI. Bedingter und unbedingter Beweis für Taylors Reihe 260

Cap. XVII. Anwendung der Differentialquotienten zur Findung der gröfsten und kleinsten Functionswerthe 272

Cap. XVIII. Anwendung der Differentialquotienten zur Ersparung mühsamer Divisionen . .

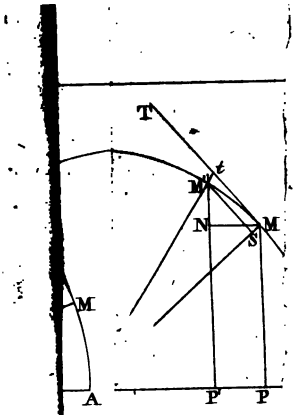
Einige rückständige, vorzüglich wichtige Anwendungen der Differentialrechnung, namentlich auch die zeichenrichtige Formulirung der Krümmungsmesser, die systematisch richtige Bestimmung der gröfsten und kleinsten Krümmungen, die systematisch bündige Auffindung der gröfsten und kleinsten Werthe mehrfach variabler Functionen, — und was ich sonst etwa, nach eigenthümlichen Ansichten neu bearbeitet, in der schon erwähnten Schrift, Formulae radii osculatoris, und dessen 4fachem Anhange, auch im Hesperus und in der Isis, hier zu liefern versprochen habe, — mufs bis zum Nachtrage verschoben bleiben, weil die Druckerey ein Mehres zur Messe fertig nicht liefern konnte, nachdem durch die Entfernung zwischen mir und ihr die Correcturen manche Unterbrechung verursacht hatten. Ohne solche Entfernung dürfte ich, bei der so musterhaft eingerichteten Druckerey, und ihrem so äufserst gefälligen Personale, vielleicht gar keine beträchtlichen Druckfehler anzuzeigen gehabt haben.

Druck- und Schreibe-Fehler.

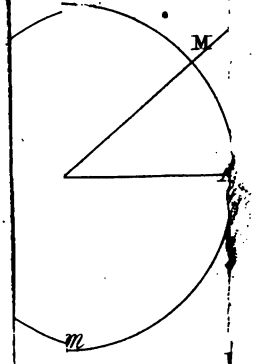
Seite	Zeile	statt	zu lesen.
XXXXVI	6 von oben	18	1820 No. 18.
XXXXIX	5 ″ ″	$:\propto\propto\propto$	$\propto\propto:\propto\propto\propto$
L	7 ″ ″	$\frac{Q}{P}:\frac{Q}{P}$	$\frac{Q}{P}$
LVI	13 ″ ″	Fig. 11	Fig. 2
LXIV	2. u. 7 ″ unten	1	r
3	7 u. 2 ″ ″	Gründen	Gröfsen
19	12 ″ oben	$(3x^2\,\Delta x)^2$	$(3z^2\,\Delta x)^z$
35	6 ″ ″	p oder p	p
41	10 ″ unten	$+++$	$-+-$
43	1 ″ oben	a o	also
44	§. 8. Zeile 3	Fig. 2	Fig. 2*
45	§. 11. ″ 2	Fig. 2	Fig. 2**
47	§. 14. ″ 8	§. 14.	II. §. 14.
47	Zeile 2 von unten	dx	dX
63	§. 4. Zeile 1	Fig. 6	Fig. 7*
86	Zeile 16 von oben	$(X^n)=$	$(X^n)^z=$
90	5 ″ ″	$bx-5$	b^{x-5}
90	§. 23. Zeile 6 v. u.	a^{10}	a^4
94	§. 34. ″ 1 ″	$=dy$	$=x\,dy$
102	§ 47. Überschr.	I und II	I und IV
102	Zeile 7 v. u.	z	zdn
103	″ 2 ″ ″	$.d(a^2$	$-(a^z$
109	Zeile 11 ″ ″	$+$	$\mp$
110	Zeile 10 v. unten	$\mp 2x\pm$	$2x\mp$
122	″ 3 ″ oben	$U=ZN$	$U=\frac{Z}{N}$
122	″ 7 ″ ″	$^nd\frac{1}{N}$	^ndU
126	″ 12 ″ ″	$x^4-x^2)$	$x^4)-x^2$
134	″ 10 ″ unten	dx	dx^n
141	§. 10. Zeile 3	bedeuten	bedeutend
144	§. 12. ″ 3	M C t	M' M t
148	§. 15. Z. 11 v. u.	hingegen	hiergegen
173	§. 9. ″ 4 ″ ″	Fig. 11	Fig. 13
176	Zeile 7 v. oben	0,33	0,43
183	″ 10 ″ unten	log (logy)	log (log y)

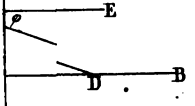
Seite		statt	zu lesen
187	§. 32. Z. 1	bX	b^X
233	§. 5. ‚ 2	Veränderung	Belegung
236	§. 11. ‚ 1	AB	BA
240	§. 16. ‚ 2	erhalten	erhellen
242	Zeile 7 von oben	MT	ME
243	‚ 9 ‚ unt.	MT	ME
247	‚ 4 ‚ ‚	$\frac{dy}{dy}$	$\frac{dy}{dx}$
249	‚ 4 ‚ oben	$x^{\beta-1}$	$x^{\beta-2}$
252	‚ 14 ‚ ‚	$\frac{\sin z}{1.2.3.4}$	$\sin z\, dz^4$
253	‚ 2 u. 3 ‚ ‚	$-5x^4$	$-4x^3$
253	‚ 11 von unt.	ydx^2	qdx^2
271	‚ 3 u. 5 ‚ oben	α) und α	α und α)
273	‚ 6 ‚ unten	transscendentalen	transversalen
274	§. 4. Zeile 3	$x=$	$'x=$
274	§. 4. ‚ 3	$P'M'=y$	$'P'M='y$
274	§. 4. ‚ 6	$P'P$	$'P'P$
275	§. 4. ‚ 3	RM'	$P'M'$
277	§. 8. ‚ 9	x	x'
279	§. 11. ‚ 6	21^*	21^{**}
282	‚ 1	xx	x
289	Zeile 5 von unt.	a	a^3
290	‚ 5 oben	gröfser als	gröfser oder
300	‚ 10 ‚ ‚	KF	KE
304	‚ 7 ‚ ‚	QD	QP
308	‚ 6 unten	$^xd\,^xdU$	$^ydy^ydU$
308	‚ 7 ‚ ‚	$x=$	$x-$
310	‚ 12 ‚ oben	$2\pi xx+5\pi xx$	$2\pi xx+4\pi xx=6\pi xx$
311	‚ 1 ‚ ‚	$A^{\frac{2}{3}}$	$A^{\frac{1}{3}}$
311	‚ 2 ‚ ‚	$A.2^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{1}{3}}$	$A.2^{\frac{2}{3}}.\pi^{\frac{2}{3}}$
313	§. 62 Zeile 3	D	C
315	Zeile 7 von unten	$.\sin\varphi^2$	$-2\sin\varphi^2\cos\varphi.$

Im XVIIten Capitel findet man $x^I, P^I; M^I$ und dergleichen gesetzt, weil das dafür geschriebene, und in den Figuren gestochene $\overset{I}{x}, \overset{I}{P}, \overset{I}{M}$, in der Eile für die Druckerey nicht konnte gegossen werden.

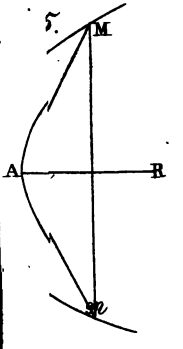


2

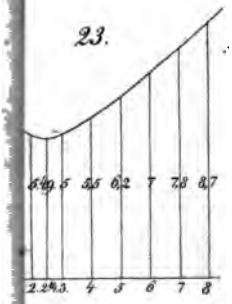




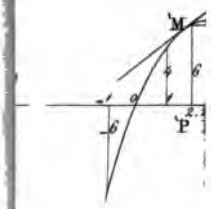
5.



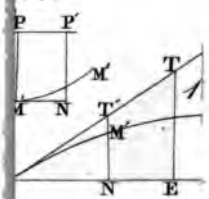
23.

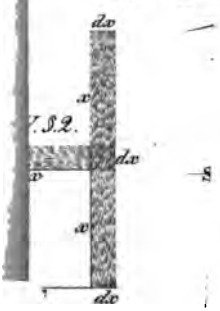

5,4 9,5 5,5 6,2 7 7,8 8,7
2 2,4 3 4 5 6 7 8

21


M
4
6
-1
0
1
2
-6
P

21.


P
P'
M'
M
N
T
T'
M'
N
E


dx
x
dx
x
x
dx